

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 17 日現在

機関番号：12613

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740065

研究課題名(和文)非双曲力学系の不安定周期軌道解析に関する大規模数値解析

研究課題名(英文)Analysis of non-hyperbolic systems through unstable periodic orbits

研究代表者

齊木 吉隆 (SAIKI, Yoshitaka)

一橋大学・大学院商学研究科・准教授

研究者番号：20433740

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：力学系は大きく双曲力学系と非双曲力学系に分類される。双曲力学系は、相空間の各点で“伸びる方向と縮む方向に分離可能な系”であり、少なくとも幾何学的立場ではSmale以降の研究によってかなり理解が進んでいた。本研究では双曲性が崩れた力学系を系に埋め込まれた不安定周期軌道解析を用いて特徴づけた。(1)非双曲性が強い状況(力学系のクライシス現象が発生する近傍)(2)双曲型構造が徐々に壊れる様な状況、を調べ、そこで得られた知見に基づいて(3)非双曲力学系に対する不安定周期軌道展開の構築を行った。

研究成果の概要(英文)：Dynamical systems can be classified into two types hyperbolic systems and non-hyperbolic systems. Hyperbolic systems have been understood well since the Smale's work. In this study we focus on non-hyperbolic systems and obtained some results in (1) strongly non-hyperbolic case, and (2) the occurrence of non-hyperbolicity by using unstable periodic orbits. Based on these results we have constructed cycle expansion theory which works well for the Henon map of a non-hyperbolic parameter.

研究分野：力学系、応用数学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：力学系 カオス 不安定周期軌道 リアプノフベクトル

1. 研究開始当初の背景

天体力学、流体力学、気象をはじめとする我々の身の回りの複雑な自然現象・社会現象はしばしば微分方程式や写像によって記述される。複雑現象の数理モデルはそれがもつ非線形性により、解析的な解が得られないことが多く、その場合には系を定性的に扱うことが必要となる。力学系理論はその文脈で発展してきたと言っても過言ではない。力学系は大きく双曲力学系と非双曲力学系に分類される。双曲力学系は、相空間の各点で“伸びる方向と縮む方向に分離可能な系”であり、少なくとも幾何学的立場では Smale 以降の研究によってかなり理解が進んでいた。また、双曲力学系の特徴づけに周期軌道が重要な役割を果たすことはよく知られている。例えば、C¹級の摂動に対して構造安定な可微分力学系は、公理 A 力学系(非遊走集合が双曲的で周期点が稠密に存在する系)であることが知られている。また、1980年代に双曲力学系に対して提案された周期軌道展開(周期軌道の重み付き平均による系の統計量の近似公式)や研究代表者によるここ数年の周期軌道上の軌道平均値に関する大規模数値計算を援用した研究によって定量的な側面に関する知見も蓄積されつつある。一方、非双曲系に特徴的な性質もいくつかわかってきた。公理 A 力学系の場合には、周期点の個数は周期に対して漸近的には指数的に増大することが知られていた(Bowen (1971)[R1])が、非双曲力学系の中には周期点の個数が指数より早いオーダーで増大する例が generic に存在することが明らかとなった(Kaloshin(2000)[R2])。また、近年の力学系の幾何学的研究によれば、安定多様体と不安定多様体が接する構造(Tangency)と不安定方向の数が異なる固定点を繋ぐサイクル(Heterodimensional cycle)が非双曲構造における典型的な構造であると考えられており、かなり広いクラスの力学系でこれらの構造は周期軌道で特徴づけられると予想されている。そこで、周期軌道を鍵として非双曲力学系を特徴づける研究は、本質的な問題として認識されてきた。しかしながら、非双曲力学系の研究では強力な研究手法を欠いているため、質のよい数値計算を用いて理論的予測を立てることは一つに重要なアプローチであると考えられた。

R1. Bowen R, Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms, Transactions of the American Mathematical Society, 154 (1971).

R2. Kaloshin V, Generic diffeomorphisms with superexponential growth of number of periodic points, Communications in Mathematical Physics, 211, 253-271 (2000).

2. 研究の目的

研究代表者は、系をいかにして周期軌道によって定性的、定量的に特徴づけられるかという問題に取り組んだ。そして、最終的には、(1)非双曲系カオスにおける不安定周期軌道の分類、(2)非双曲力学系の周期軌道展開の構築を行った。研究代表者は予備的研究として、ローレンツ系の非古典パラメタで非双曲構造が支配的な場合(古典パラメタの場合は特異双曲系であり、非双曲系ではあるが本質的に双曲的なふるまいをもつ)に、双曲構造に対応する不安定周期軌道と Tangency 構造に由来する不安定周期軌道の2種類に分類可能となることを予想させる結果を得た。周期軌道の周期に対する統計量分布をプロットすることによって得られたこの結果は非双曲力学系のカオスにおける Tangency 構造を周期軌道によって捉える具体例を与え、また、双曲的ふるまいと真に非双曲的なふるまいが明確に分類可能となることを示唆しており非常に興味深い。そこで、この分類のための客観的指標を与えることが大きな目標となった。パラメタ変化による Tangency 構造の生成消滅を、対応する周期軌道の構造変化によって明確化することにより、客観的指標の同定が可能になると期待された。また、同力学系に関しては、Zoldi(1998)[R3]において、双曲力学系の周期軌道展開を改良したものが提案されたが、その理論的裏付けは現状では存在しない状況であった。周期軌道を2種類に分類することによって、ここで提案された展開の理論的背景もしくは確固たる理論を伴う適切な修正案を提示し、非双曲力学系を含む一般的な枠組みで成り立つ周期軌道展開の確立することが期待された。なお、エノン写像が非双曲系となる状況でも、双曲力学系の周期軌道展開公式が成り立つ場合があることが Lai et al.(1997)[R4]によって報告されているので、その研究とも整合的な理論を構築することを計画した。また、周期軌道の分布に関する知見を得ることによって収束の早い実用的な近似公式へ改良することが重要であった。

R3. Zoldi SM, Unstable Periodic Orbit Analysis of Histograms of Chaotic Time Series, Physical Review Letters, 81, pp3375:1-4 (1998).

R4. Lai YC, Nagai Y, Grebogi, C, Characterization of the Natural Measure by Unstable Periodic Orbits in Chaotic Attractors, Physical Review Letters, 79, 649-652 (1997).

3. 研究の方法

まず、(1)非双曲性が強い状況(力学系のクライシス現象が発生する近傍)で周期軌道の発生メカニズムとその周期軌道の性質(多様体の構造、不安定性等)を明らかにする。次に、(2)双曲型構造が徐々に壊れる様な状況を、埋め込まれた多数の不安定周期軌道に関す

る多様体構造の変化で特徴づける。これら(1)(2)の研究は、具体的な写像、微分方程式に対して多数の不安定周期軌道を同定することによって行われる。最後に、上で得られた定性的な描像を定量化、すなわち、(3)非双曲力学系に対する不安定周期軌道展開の構築を行う。さらに、実際に従来不安定周期軌道展開が適用できなかった力学系に対して適用し、構築された理論の正当性を確認する。

4. 研究成果

(平成23年度)

力学系の大域的な構造変化であるクライシス現象に対する不安定周期軌道解析をおこなった。アトラクタ・マーキング・クライシスやインテリア・クライシスは力学系の構造を大きく変える普遍的な現象であり、非双曲構造があらわれる例である。平成23年度は時空カオスを示す偏微分方程式として有名な蔵本・シバシンスキー方程式に対し、まずアトラクタ・マーキング・クライシスをおこなすパラメータを調べ、その前後のパラメータにおいて多数の不安定周期軌道を数値的に同定した。これらを分類することによってクライシス現象を捉えなおすことに成功した。クライシスの前後では、カオスアトラクタの構造がドラスティックに変わるが、それと主に存在する周期軌道もドラスティックに変化することが見出された。すなわち、クライシス後には新たな種類の不安定周期軌道群がサドル・ノード分岐によって発生する。サドル・ノード分岐に対応して周期窓が存在するが、周期窓がクライシス点に向かって集積していくことに対応している。一方、クライシス前後で不変な構造も存在する。クライシス前はカオスアトラクタ、のちかカオティックサドルとなる不変集合は安定性こそ変化するが、埋め込まれた不安定周期軌道は共通であることも確認された。カオティックサドルにはギャップ領域が存在するが、そのギャップ領域を新しく生まれた周期軌道群が埋めている。以上のようにクライシス前後で存在する不安定周期軌道の分類をおこなうことにより、大域的構造変化の背後にある骨格が理解できた。

(平成24年度)

エノン写像、ローレンツ系などに関して、パラメータを変えながら安定多様体、不安定多様体の構造変化を周期軌道を用いて調べた。そして、それらの力学系に関し、パラメータ変化に伴う非双曲構造、特に安定多様体と不安定多様体の接構造の発生は、サドル・ノード分岐のノード周期軌道が周期場合分岐するとともに生まれる不安定周期軌道の系列の極限で捉えられることを明らかにした。特に、周期軌道系列の安定多様体と不安定多様体がなす角度の減衰レートに一定の法則があることを見出した。非双曲構造(多様体の接

構造)がこの様に捉えられることの具体的な数値計算例を与えた意味で重要な結果である。また、すでに数学的に双曲的、(特異)双曲的であることが知られているパラメタからあるパラメタを動かしていった際に系がはじめて接構造をもつパラメタ値はカオス的な軌道に対するリアプノフベクトル計算によって推定できるが、そのパラメタ値は、系に埋め込まれた不安定周期軌道を用いることによってより精密に得られることを確認した。

(平成25年度)

安定多様体と不安定多様体が接構造をもつことによって双曲性を破綻させている非双曲力学系に対する不安定周期軌道展開をおこなった。1990年ごろよりカオス力学系に埋め込まれた不安定周期軌道を用いて、系の物理的な不変測度などを特徴づける不安定周期軌道展開の試みがなされてきた。しかし、それらはいずれも双曲的な構造を意識した展開公式であったため、非双曲力学系への適用に限界があることが知られていた。実際、安定多様体と不安定多様体が接構造をもつエノン写像で従来展開公式を適用すると、双曲的な場合に比べて収束の速度が遅くなることが確認されている。従来不安定周期軌道展開においては、各周期軌道の周期と不安定性のみが用いられてきた。一方、接構造をもつ非双曲力学系においては、安定多様体と不安定多様体がなす角度が小さい不安定周期軌道が接構造に集積していることが平成24年度の研究で見出していった。すなわち、多様体の角度が狭い領域には不安定周期軌道が多く存在するため、双曲性の弱い周期軌道の貢献が相対的に小さくなると予想した。そこで、研究代表者は、接構造をもつエノン写像を例に、埋め込まれた不安定周期軌道の安定多様体と不安定多様体のなす角度を計算して各不安定周期軌道の双曲性の程度を捉え、双曲性の程度が低い不安定周期軌道の貢献を相対的に低くすることによって不安定周期軌道展開の収束速度を改良できることを見出した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

1. 齊木吉隆, 非双曲力学系の不安定周期軌道解析: エノン写像の周期軌道展開, 九州大学応用力学研究所 研究集会報告「非線形波動現象の拡がり」25A0-S2, 91-100, 2014(査読有)。

2. M. U. Kobayashi and Y. Saiki, Manifold structures of Unstable Periodic Orbits and the Appearance of a Periodic Window in Chaotic Systems, Physical Review E 89, 022904:1-6, 2014(査読有)。

3. Y. Saiki and M. Yamada, Time Averaged Properties Along Unstable Periodic Orbits of the Kuramoto-Sivashinsky Equation, Nankai Series in Pure, Applied Mathematics and Theoretical Physics: Volume 10, World Scientific, 145-154, 2013 (査読有) .
4. Y. Saiki and K. Ishiyama, Recognition of transition patterns in a business cycle model by unstable periodic orbits, International Journal of Bifurcation and Chaos 21, 1-21, 2011 (査読有) .
5. Y. Saiki, A. Chian and H. Yoshida, Economic intermittency in a two-country model of business cycles coupled by investment, Chaos, Solitons and Fractals 44, 418-428, 2011 (査読有) .

〔学会発表〕(計 12 件)

1. Y. Saiki, Unstable periodic orbits in intermittent dynamics, Workshop on Lagrangian Coherent Structures and Dynamical Systems, Hokkaido University, 北海道, 2014.3.7.
2. Y. Saiki and M. U. Kobayashi, Characterization of tangencies between stable and unstable manifolds through unstable periodic orbits, The 3rd International Symposium on Innovative Mathematical Modelling, The University of Tokyo, 東京都, 2013.11.15.
3. 齊木吉隆, 非双曲力学系の不安定周期軌道解析, 九州大学応用力学研究所共同利用研究集会「非線形波動研究の拡がり」, 九州大学, 福岡県, 2013.11.2.
4. 齊木吉隆, 非双曲力学系の解析, Hayama meeting, IPC 生産性国際交流センター, 神奈川県, 2013.9.1.
5. 江刺邦彦, 齊木吉隆, 離散時間カルドアモデルのトーラスとその制御, 日本地域学会, 立正大学, 東京都, 2012.10.7.
6. Y. Saiki, Numerical study of unstable periodic orbits in some chaotic systems, International Conference: 100 years after Poincare, Spain, 2012.9.9.
7. Y. Saiki, Covariant Lyapunov vectors and unstable periodic orbits in the '63 Lorenz system, Weather-Chaos Seminar, University of Maryland, U.S.A, 2012.8.27.
8. 齊木吉隆, カオスの景気循環モデルの不安定周期軌道解析, 数理科学セミナー, 一橋大学, 東京都, 2012.6.27.
9. 齊木吉隆, カオス力学系の共変リアプノフ解析, 研究会「流体乱流の力学と統計 - 複雑系化学からのアプローチ」, しこつ湖鶴雅リゾートスパ水の舘, 北海道, 2012.3.6.
10. Y. Saiki, Numerical Study of Unstable Periodic Orbits in the Kuramoto-Sivashinsky system, Emerging topics on Differential Equations and their Applications, Nankai University, China,

2011.12.9.

11. Y. Saiki and M. Yamada, Relations between Statistical Values along Unstable Periodic Orbits in Differential Equation Systems, IUTAM Chaos, Kyoto University, 京都府, 2011.12.1.
12. Y. Saiki, M. Yamada, A. C.-L Chian, M. U. Kobayashi, Recognition of chaotic saddles and classification of unstable periodic orbits of the Kuramoto-Sivashinsky system, Dynamics Days Europe, Oldenburg University, Germany, 2011.9.15.

〔その他〕

ホームページ等

研究代表者ホームページ

<http://www.cm.hit-u.ac.jp/~saiki>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齊木 吉隆 (SAIKI, Yoshitaka)

一橋大学・大学院商学研究科・准教授

研究者番号：20433740