

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 9 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740068

研究課題名(和文)多品種流・施設配置・ネットワークデザインの理論とアルゴリズム

研究課題名(英文)Theory and algorithm of multiflow, facility location, and network design

研究代表者

平井 広志(Hirai, Hiroshi)

東京大学・情報理工学系研究科・講師

研究者番号：20378962

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円、(間接経費) 510,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題の主な成果としては、グラフ上の施設配置問題(最小ゼロ拡張問題)に対する多項式時間可解なグラフの分類を完成させたことである。また、その証明中にグラフ上の離散凸関数という新しい概念を導入し、多品種流や施設配置問題に対する「離散凸性」というこれまでになかった新しい研究の方向性を切り開いた。これは本研究課題が目的としていた多品種流、施設配置問題、ネットワークデザイン問題に対する統合的理論の構築に向けた大きな一歩である。

研究成果の概要(英文)：The main result of this research project is to complete the classification of graphs  $G$  for which multifacility location problem (minimum 0-extension problem) on  $G$  is polynomial time solvable. In the proof, we introduced discrete convex functions on a class of graphs, and opened up new research direction "discrete convexity for multiflow and facility locations." This is an important step toward a unified theory for multiflow, facility location, and network design, which was the goal of this research project.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：施設配置問題 多品種流 ネットワークデザイン メトリック

## 1. 研究開始当初の背景

多品種流とは、ネットワーク中に複数の異なる種類のフローが流れる状況を取り扱うのもので、VLSI 設計、交通網、インターネット等、多くの現実的問題に動機付けられた数学モデルである。施設配置問題とは、距離空間やネットワーク上に施設を効率よく配置する問題であり、これも実用上の問題に動機付けられている。ネットワークデザイン問題とは、連結度などの制約を満たす部分ネットワークの中で、最もコストが低いものを求める問題であり、非常に多くの応用がある。これらの問題は、多くの定式化においてたちまち NP 困難となるので、マトロイド・劣モジュラ最適化・離散凸解析といった「きれいな理論」の一部分として統一的に扱うことが難しく、かつ、扱える領域が不透明であった。従って、離散最適化分野においては、これまで別々の領域として個別に研究が行われてきた。

私自身は、ここ数年、多品種流理論における古典的事実「フローと距離空間の双対性」の拡張精密化に取り組んできた。その主な成果の 1 つとして、重み付き多品種流最大化問題に対して、その重みだけから決まる「ある距離空間」が存在して最大流量は、その距離空間上の施設配置問題の最小コストに一致する、というものがある。また、多品種流理論においては、フローのルーティングは一般に取り扱いが難しいが、フローのサポート(つまり各枝上の流量の合計)は幾分扱い易く、フローのサポートを「部分グラフ」としてみるネットワークデザインの手法が適用できることがこれまでの研究からわかってきた。よって、これらの問題群、つまり、多品種流、施設配置問題、ネットワークデザイン問題は互いに関連しあっている。

## 2. 研究の目的

本研究は離散最適化分野における多品種流、施設配置問題、ネットワークデザイン問題に対する統合的理論の構築と、それに基づいた各種多項式時間アルゴリズムと近似アルゴリズムの設計を目指すものがある。個別の問題に取り組みながら、上述の統合的理論の構築を目指す。具体的な目標としては、以下がある：

### (a) 最小ゼロ拡張問題の多項式時間可解性

本課題で扱う施設配置問題は、最小ゼロ拡張と呼ばれる問題のクラスとその変種であり、多品種流問題の組合せ的双対問題は(もし存在するなら)最小ゼロ拡張問題となる。多項式時間可解最小ゼロ拡張の特徴付ける問題(Karzanov の問題)は、いくつかの部分的結果・予想があるが未解決である。この問題の解決と解決のための枠組み作りが、本研究課題の大きな目標である。

### (b) 最小費用整数・半整数自由多品種問題のアルゴリズム

最小費用自由多品種問題は半整数性を持ち多項式可解であるものの、Goldberg-Karzanov が与えた組合せ的アルゴリズムは極めて難解なものである。フローを整数値に限定した問題においても Karzanov が組合せ的アルゴリズムを与えたが、66 ページにわたる長大難解なもので未出版である。これに対し、上の述べたようなネットワークデザイン問題として定式化・抽象化することで、より簡明な組合せ的アルゴリズムをより広いクラスに対して構築する。

### (c) カット被覆問題と多品種流

ネットワークデザイン問題の自然な LP 緩和問題であるカット被覆問題は、近似アルゴリズム設計において重要な役割を演ずる。あるクラスの多品種流問題は、フローサポートのカット被覆問題と翻訳することが出来る。逆に、あるクラスのカット被覆問題を多品種流問題と翻訳できることがわかってきた。この関係性を確立し、それらのクラスに対するアルゴリズムを構築を目指す。

### (d) 近似アルゴリズム設計への応用

上に述べた課題の多くは、多項式時間可解となる NP 困難問題の部分クラスや NP 困難問題の緩和問題、そして、その多項式時間アルゴリズムに関わるものである。上述の研究成果の応用として、近似アルゴリズムの設計を試みる。

## 3. 研究の方法

初年度は主に個々の問題の関連性や構造的な理解に重点をおく。次年度以降は、それらを踏まえ、徐々にアルゴリズム的研究、近似アルゴリズム設計への応用、統合的理論の構築へシフトする。特に研究課題の目的である統合的理論とは「ユークリッド的でない空間における(離散的)凸最適化理論」とでも呼ぶべきものであり、これが研究を進めるうえでの指導原理となる。また関係する国内・国外の研究者と交流する。

最小ゼロ拡張問題は、最小カット問題を特殊ケースとして含むがその有用な性質の多くは、劣モジュラ性から得られる。1 つの指針は、最小ゼロ拡張問題における「劣モジュラ性・離散凸性」にあたるものを見出すことにあると考えている。

最小費用多品種流問題については、ハンガリー・エトバス大学 EGRES グループの Gyula Pap 博士との共同研究が進行中であり、いくつかの部分的結果が得られている。まず、準備段階として非組合せ的であるが議論が簡明な楕円体法に基づく多項式性の証明から始め、構造的な理解を深めていく。カット被覆問題について、まず多品種流問題

として表すことができるクラスの特徴付けから始める。また、古典的な Gomory-Hu のネットワーク合成理論や、連結度増大問題、枝スプリッティングの諸結果を文献調査し、多品種流の立場から再考する。

得られた研究成果は随時、論文にまとめ、その成果の性格により学術誌あるいは国際学会に投稿する。国内の学会にも出席し、研究発表、ディスカッション、情報収集を行う。

#### 4. 研究成果

本研究の主な目標であった最小ゼロ拡張問題の可解性分類に成功した(論文3)。「最小ゼロ拡張問題における離散凸性・劣モジュラ性」というべきものの発見に Valued CSP の分野で得られた重要な結果(Thapper-Zivny, FOCS12)を組み合わせることによって、「向き付け可能モジュラグラフ上の最小ゼロ拡張問題は多項式時間可解である」という決定的な結果を得た。Karzanov による先行結果「向き付け可能モジュラグラフでないグラフ上では最小ゼロ拡張問題は NP 困難である」を合わせることで、多項式時間可解性の分類が完成された。ここで用いた証明法は、向き付けられたモジュラグラフ上に離散凸関数を導入するもので、離散凸解析, Valued CSP, そして離散距離空間論という異なる分野を結びつけるもので、新たな研究の方向性を示された。その方向性の一部をいくつかの招待講演で紹介した(論文2, 講演1,2)。

最小費用整数多品種フロー問題についても共著論文1において、多項式可解なクラスを分類することができた。このなかでは、90年代に Karzanov が60ページに上る長大で未出版な論文の結果を一般化かつ簡略化することに成功している。また、この結果に、低歪み埋め込み理論を援用して近似アルゴリズムを設計した。

古典的なネットワークデザイン問題であるネットワーク合成問題について、60年代に Gomory と Hu は、単純なグリーディアルゴリズムによって半整数の最小解が求まることを示しているが、この古典的な結果を、ある特殊な歪劣モジュラ関数による最小カット被覆問題に拡張し、低歪み埋め込み理論を用いて、より広いクラスに対して近似アルゴリズムを設計した(Than Nguyen Hau, 土村展之との共著, 論文投稿中)。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

1. H. Hirai and G. Pap: Tree metrics and edge-disjoint  $S$ -paths, *Mathematical Programming, Series A*, 査読有, 掲載予定, (2014),

DOI:10.1007/s10107-013-0713-5.

2. H. Hirai: Discrete convexity for multiflows and 0-extensions, *Proceedings of 8th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, 査読無, 2013, pp.209-223, [http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~hirai/papers/L-convex\\_jh13.pdf](http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~hirai/papers/L-convex_jh13.pdf).

3. H. Hirai: Discrete convexity and polynomial solvability in minimum 0-extension problems, *Proceedings of the 24th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'13)*, 査読有, 2013, pp.1770-1788, DOI:10.1137/1.9781611973105.127.

4. H. Hirai: Half-integrality of node-capacitated multiflows and tree-shaped facility locations on trees, *Mathematical Programming, Series A*, 査読有, 137 (2013), 503-530, DOI: 10.1007/s10107-011-0506-7.

5. H. Hirai: Bounded fractionality of the multiflow feasibility problem for demand graph  $K_3 + K_3$  and related maximization problems, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 査読有, 102 (2012), 875-899, DOI:10.1016/j.jctb.2012.02.001.

6. H. Hirai and S. Koichi: On tight spans for directed distances, *Annals of Combinatorics*, 査読有, 16 (2012), 543-569, DOI:10.1007/s00026-012-0146-5.

7. H. Hirai: Folder complexes and multiflow combinatorial dualities, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 査読有, 25 (2011), 1119-1143, DOI:10.1137/090767054.

[学会発表](計10件)

1. 平井広志: グラフ上の離散凸関数とその応用, 第92回人工知能基本問題研究会(SIG-FPAI), 函館市民会館, 北海道, 2014年1月30-31日.

2. H. Hirai: Discrete convexity and polynomial solvability in minimum 0-extension problems, 4th Cargese Workshop on Combinatorial Optimization, Institut d'Etudes Scientifiques de Cargese, Corsica, France, September 30-October 5, 2013.

3. 平井広志: 多品種フローと距離空間, 第35回応用数学連携ワークショップ, 東北大学, 宮城県, 2013年7月17日.

4. H. Hirai: Discrete convexity and polynomial solvability in minimum 0-extension problems, Combinatorial Geometries: matroids, oriented matroids and applications (CG13), Marseille-Luminy, France, April 2-6, 2013.

5. H. Hirai: Discrete convexity and polynomial solvability in minimum 0-extension problems, The 24th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '13), New Orleans, USA, January 6-8, 2013.

6. H. Hirai: Discrete convexity and polynomial solvability in minimum 0-extension problems, Discrete Convexity and Optimization, Kyoto, October 15-18, 2012.

7. H. Hirai: On Tractability of Minimum 0-Extension Problems, Graph Theory@Georgia Tech, Atlanta, USA, May 7-11, 2012.

8. H. Hirai: Weight classification in multiflow problems, Combinatorial Optimization, Oberwolfach, Germany, November 13-19, 2011.

9. 平井広志: 多品種フロー理論: フロー・メトリック双対性の最近の進展, 第23回RAMPシンポジウム, 関西大学, 大阪府, 2011年10月24-25日.

10. H. Hirai: Weighted Multiflows, 7th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Kyoto, May 31-June 3, 2011.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~hirai/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

平井 広志 (HIRAI, Hiroshi)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・講師

研究者番号: 20378962