

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 5 月 15 日現在

機関番号：34304

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2015

課題番号：23740073

研究課題名(和文)マルコフ過程の汎関数に関する極限定理とその応用

研究課題名(英文)Limit theorems of functionals for Markov processes and their applications

## 研究代表者

矢野 裕子 (YANO, Yuko)

京都産業大学・理学部・准教授

研究者番号：10337462

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：マルコフ過程に対する汎関数に関連した極限定理を通して確率過程の構造を明らかにすることを目的として研究を行い、以下の成果を得た：フラクタル上の拡散過程の片側滞在時間分布の漸近挙動を調べた(梶野氏らとの共同研究)；マルチレイ上の拡散過程の滞在時間同時分布に関する極限定理を得た；フルヴィッツゼータ関数の確率論的特殊値計算方法を提示した(藤田氏との共同研究)；加法過程の最大値処罰問題を支配するシグマ有限測度を構成した；一次元拡散過程に対する原点回避条件付けの問題を考察した(矢野氏との共同研究)；一次元拡散過程に対するランダム時刻による局所時間処罰問題を解決した(Profeta氏らとの共同研究)。

研究成果の概要(英文)：I studied some limit theorems of functionals for Markov processes and obtained the following results: I studied asymptotic behavior of the law of the occupation time for Brownian motion and random walks on fractals (joint work with N. Kajino et al.); I obtained some remarkable results for the joint law of occupation times for a diffusion process on multiray; I showed the new method to calculate special values of the Hurwitz zeta function via generalized Cauchy variables (joint work with T. Fujita); I succeeded to obtain a sigma-finite measure unifying supremum penalizations for a stable Levy process; I studied h-transforms of one-dimensional diffusions stopped upon hitting zero (joint work with K. Yano); I studied local time penalizations with various random clocks (joint work with C. Profeta et al.).

研究分野：確率論

キーワード：確率論 確率過程論 マルコフ過程 拡散過程 加法過程 極限定理 一般化逆正弦法則 処罰問題

## 1. 研究開始当初の背景

ブラウン運動は最も典型的な確率過程であり、既に様々な興味深い性質が知られている。本研究では特に(A)逆正弦法則と(B)処罰問題に注目する。これらの結果がブラウン運動のどのような性質に起因するものなのかを明らかにするため、より一般の確率過程に対する様々な一般化が考察されてきた。

(A)及び(B)の一般化の発展の経緯は以下の通りである。

(A)時間スケール極限定理の研究は、Lamperti (1957)によるある離散確率過程の片側滞在時間分布に対する結果に始まり、一次元加法過程については Gettoor-Sharpe (1994)、一次元拡散過程については渡辺 (1995)による結果がそれぞれ知られる。更に、笠原-渡辺 (2005)による渡辺の結果の精密化や、藤原-川村-研究代表者 (2007)による Lamperti の結果の一般化がある。

一方、固定時刻における分布の漸近挙動を調べる研究では、二次元ブラウン運動の錐領域の滞在時間分布の漸近挙動が中山 (1997)によって得られており、一次元拡散過程の正側滞在時間分布の漸近挙動が、分布関数の場合に笠原-研究代表者 (2005)によって得られ、更に渡辺-矢野-研究代表者 (2005)によって密度に関する精密化が得られている、また、原点にピン留めされた一次元拡散過程の正側滞在時間分布に関する研究が研究代表者 (2006)によって、その精密化が矢野-研究代表者 (2008)によってそれぞれ得られている。

(B)Roynette-Vallois-Yor (2006~)は様々な重み付けブラウン汎関数に対する極限定理を示し、これらを処罰問題と呼んだ。その後、Najnudel-Roynette-Yor (2008)によってこれらの処罰問題が重み汎関数に依らないある普遍的なシグマ有限測度を用いて統一的に論じられることが明らかとなった。続いて、矢野-研究代表者-Yor (2009, 2010)によって処罰問題の一次元安定過程への一般化が考察され、重み汎関数が原点局所時間及びカツ消滅型汎関数に対する処罰問題とこれらを支配するシグマ有限測度、また最大値過程による処罰問題が論じられている。一方、Profeta (2010)によるコンパクト区間上の一次元拡散過程に対するカツ生成型処罰問題や、竹田 (2010)による多次元安定過程に対するカツ消滅型処罰問題が考察されている。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、マルコフ過程、特に一次元拡散過程及び一次元加法過程に対する汎関数に関連した極限定理を通して、一次元のみならず多次元の確率過程の構造を明らかにすることであった。より詳しく言うならば、

逆正弦法則と処罰問題を拡散過程や加法過程に対して一般化することによって、これらの性質が確率過程のどのような性質に起因するものなのかを明らかにすることであった。

具体的には、以下を考察することであった。

(1)フラクタル上の拡散過程の片側滞在時間分布及びマルチレイ上の拡散過程の滞在時間同時分布に関する研究。

(2)加法過程及び拡散過程に対する処罰問題の解決。

## 3. 研究の方法

本研究は、文献調査と関連研究者との研究打ち合わせによって進められた。

(1-1)フラクタル上の拡散過程の片側滞在時間分布に関して、梶野氏、熊谷氏、Kwasnicki 氏、渡辺氏との研究打ち合わせを行った。

また、以下のセミナー講演を行い、研究交流を図った：

(1-1-a) 矢野裕子、フラクタル上の拡散過程の片側滞在時間分布について、東京確率論セミナー、2011年5月16日、東京工業大学(東京都・目黒区)。

(1-2)マルチレイ上の拡散過程の滞在時間同時分布に関する研究を単独で行った。尚、この研究について、重川氏、矢野氏、渡辺氏らと意見交換を行った。

(2-1)加法過程に対する処罰問題を通じて見出されたコーシー分布の類似分布の応用に関して、藤田氏との研究打ち合わせを行った。

(2-2)加法過程の最大値過程による処罰問題の研究を単独で行った。尚、この研究について、矢野氏、Chaumont 氏らと意見交換を行った。

(2-3)一次元拡散過程に対する原点回避条件付けの問題に関して、矢野氏との研究打ち合わせを行った。

(2-4)一次元拡散過程の処罰問題に関して、Profeta 氏、矢野氏との研究打ち合わせを行った。

(2-4)離散アゼマ-ヨールマルチンゲールとそのスコロホド埋め込み問題への応用に関して、藤田氏との研究打ち合わせを行った。

#### 4. 研究成果

本研究の研究成果は以下の通りである。

(1-1) 梶野氏, 熊谷氏, Kwasnicki 氏, 渡辺氏との共同研究において, フラクタル上の拡散過程の片側滞在時間分布について考察し, 分布関数及び密度関数の端点における漸近挙動を決定した. Sierpinski gasket に代表されるフラクタル図形は, 一般に2次元以上の空間に実現された1より大きい幾何学的次元を持つ図形であり, それらを一点で張り合わせた図形上の拡散過程の片側滞在時間を, 一次元拡散過程に対する正側滞在時間に帰着させて解析するというアイデアは斬新かつ画期的であった. 漸近挙動の指数にはフラクタル図形のスペクトル次元が関係していることが明らかとなった. 現在も引き続き共同研究を行っており, 共著論文を執筆中である.

研究成果を, 5. 主な発表論文等の〔学会発表〕の , , にて報告した.

(現在論文を準備中:

Naotaka Kajino, Takashi Kumagai, Mateuz Kwasnicki, Shinzo Watanabe and Yuko Yano, Asymptotic behavior of the law of the occupation time for Brownian motion and random walk on fractals.)

(1-2) マルチレイ上の拡散過程の滞在時間同時分布に対して, 一般化されたウィリアムズ公式及び二重ラプラス変換公式を得た. これらは Barlow-Pitman-Yor (1989) によるマルチレイ上のベッセル過程に対する結果の完全な一般化となっている. また, 矢野-研究代表者-渡辺 (2005) を応用することによって滞在時間同時分布密度関数公式を得, 更に時間スケール分布収束に関する結果を得た.

研究成果を, 5. 主な発表論文等の〔雑誌論文〕の , にて公表, 及び〔学会発表〕の , , , にて報告した.

(2-1) 藤田氏との共同研究において, 矢野-研究代表者-Yor (2009) で得られたコーシー分布の類似分布を応用し, フルヴィッツゼータ関数の確率論的特殊値計算法を提示した.

研究成果を, 5. 主な発表論文等の〔雑誌論文〕の にて発表した.

(2-2) 加法過程の最大値過程による処罰問題を支配するシグマ有限測度の構成に成功した. この測度は, 矢野-研究代表者-Yor (2010) によって導入されたシグマ有限測度とは異なる測度であるが, ブラウン運動の場合 (Najnudel-Roynette-Yor (2008)) にはその差異が不明であった. このことを明らかにした本研究の意義は大きい. また, シグマ有限測度の構成に際し, 加法過程の最大値に関

する経路分解公式を導入した. 本研究は加法過程の解析に貢献する新たな結果を得たと言える.

研究成果を, 5. 主な発表論文等の〔雑誌論文〕の にて発表した.

(2-3) 矢野氏との共同研究において, 一次元拡散過程に対する原点回避条件付け問題を考察し, 修正零レゾルベント及びスケール関数の原点消滅過程に対する調和性を調べ, 零再帰的もしくは過渡的な場合は不変, 正再帰的な場合は超過的であることを示した. フェラーの境界分類に加えて自然境界の場合を更に三通りに分類し, これらの場合分けに従い, レゾルベントを計算した.

研究成果を, 5. 主な発表論文等の〔雑誌論文〕の , にて発表した.

(2-4) Profeta 氏, 矢野氏との共同研究において, 一次元拡散過程の処罰問題, 特にランダム時刻に対する局所時間処罰問題を解決した. これまでの処罰問題では固定時刻に対する時間無限大極限を考察していたが, 極限の議論において確率過程の自己相似性に頼らざるを得ず, そのためブラウン運動, ベッセル過程, 安定過程に対する結果が知られるのみであった. 本研究では, 固定時刻の代わりに指数時刻, 到達時刻, 逆局所時刻を用い, 更に (2-3) で調べた場合分けを駆使することによって, 一部の例外を除く完全な一般論の構築に成功した. 処罰問題の解決への新たな側面を照らした本研究の功績は大きい. 現在, 雑誌投稿用の共著論文を執筆中である.

研究の概要を, 5. 主な発表論文等の〔雑誌論文〕の にて公表した.

(2-5) 藤田氏との共同研究において, ランダムウォークによる離散確率解析に関する研究を行った. 特に, 離散アゼマ-ヨールマルチンゲールの確立とそのスコロホド埋め込み問題への応用について考察した. 現在も研究を継続中であり, 共同発表, 共著論文を準備中である.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 7 件)

Yuko Yano, On the joint law of the occupation times for a diffusion process on multiray, J. Theoret. Probab. に掲載決定, 巻号頁未定, 2016. (査読あり)  
DOI 10.1007/s10959-015-0654-4

Kouji Yano and Yuko Yano, On h-transforms of one-dimensional

diffusions stopped upon hitting zero, In Memoriam Marc Yor - Seminaire de Probabilites XLVII, Lecture Notes in Math., 2137, 127--156, Springer, 2015. (査読あり)

DOI 10.1007/978-3-319-18585-9\_7

Christophe Profeta, 矢野孝次, 矢野裕子, Local time penalizations with various clocks, 確率論シンポジウム 数理解析研究所講究録, 1952, 123--127, 2015. (査読なし)

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1952-19.pdf>

矢野孝次, 矢野裕子, 一次元拡散過程に対する原点回避条件付け, 統計数理研究所共同研究リポート 350 無限分解可能過程に関連する諸問題(19), (2015年2月 統計数理研究所), 16--20. (査読なし)

Yuko Yano, A remarkable sigma-finite measure unifying supremum penalizations for a stable Levy process, Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist., 49, no. 4, 1014--1032, 2013. (査読あり)

DOI 10.1214/12-AHP497

Takahiko Fujita and Yuko Yano, Special values of the Hurwitz zeta function via generalized Cauchy variables, Kyoto J. Math., 52, no. 3, 465--477, 2012. (査読あり)

DOI 10.1215/21562261-1625163

矢野裕子, マルチレイ上の拡散過程の滞在時間同時分布, 統計数理研究所共同研究リポート 275 無限分解可能過程に関連する諸問題(16) (2012年2月 統計数理研究所), 17--23. (査読なし)

〔学会発表〕(計 8 件)

矢野裕子, ブラウン処罰問題について, 確率論早春セミナー, 2014年3月7日, 京都大学(京都府・京都市). (招待講演)

Yuko Yano, On the law of the occupation time for Brownian motion on fractals, Stochastic Analysis and its Applications, 2012年3月16日, 新潟大学(新潟県・新潟市). (招待講演)

矢野裕子, マルチレイ上の拡散過程の滞在時間同時分布, 非正則な拡散過程における諸問題, 2012年1月29日, 奈良女子大学(奈良県・奈良市). (招待講演)

矢野裕子, マルチレイ上の拡散過程の滞

在時間同時分布, 統計数理研究所共同研究会「無限分解可能過程に関連する諸問題」, 2011年11月10日, 統計数理研究所(東京都・立川市).

矢野裕子, マルチレイ上の拡散過程の滞在時間同時分布, マルコフ過程と関連する話題, 2011年11月5日, KKR 鹿児島敬天閣(鹿児島県・鹿児島市). (招待講演)

矢野裕子, マルチレイ上の拡散過程の滞在時間同時分布, 日本数学会秋季総合分科会統計数学分科会, 2011年9月28日, 信州大学(長野県・松本市).

矢野裕子, フラクタル上のブラウン運動の片側滞在時間分布について, 日本数学会秋季総合分科会統計数学分科会, 2011年9月28日, 信州大学(長野県・松本市).

Yuko Yano, On the law of the occupation time for Brownian motion on the Sierpinski gasket, 5th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, 2011年9月8日, ボン大学(ドイツ・ボン). (招待講演)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

矢野 裕子 (YANO, Yuko)

京都産業大学・理学部・准教授

研究者番号: 1 0 3 3 7 4 6 2