2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 ２４ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４００７４
研究課題名（和文）特異性を持つ非線形積分方程式に対する解の数値的検証法の研究

研究課題名（英文）The research of numerical verification methods for nonlinear integral equations with singularity

研究代表者
木下　武彦（Kinoshita, Takehiko）

京都大学・健康長寿社会の総合医療開発ユニット・講師

研究者番号：３０５４６４２９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究で対象とした積分方程式と同値な常微分方程式に対する解の存在を検証する手法の開発を行った．そのために必要な線形楕円型作用素の可逆性とその作用素ノルムの評価を得る方法の改善に成功した．さらに，作用素に摂動を加え，逐次逆作用素ノルムを評価する方法を開発した．しかし，本摂動法を用いても目標としていた特異性を持つ常微分作用素には到達する事ができなかった．その他にも射撃法と呼ばれる，初期値問題を解く手法を用いて境界値問題を解く手法により，特異性を持つ常微分方程式の解を検証する方法も試みた．その際必要となる，初期値問題の解を検証する新しい方法の開発に成功した．

研究成果の概要（英文）：We have developed the verification methods for existence of a solution of the ordinary differential equation which equivalent to integral equation of a target. We succeeded in improvement of the necessary the verification method of invertibility for linear elliptic operator and its estimates. Moreover, we have developed the method to add a perturbation to the elliptic operator and sequentially estimates inverse operators. However, even this perturbation method couldn't reach the ordinary differential operator with singularity which was a target. Furthermore, the verification method based on shooting method, solving a boundary value problem by reducing it to the solution of an initial value problem, was also tried. We succeeded in development of new verification method of initial value problem necessary to the case.

研究分野：数値解析

キーワード：積分方程式　微分方程式　有限要素法　精度保証付き数値計算

1. 研究開始当初の背景

数値的検証法とは計算機で求めた近似解を元にして，その近傍に数学的に厳密な解の存在を証明する手法である．数値的検証法により厳密解の存在が証明できた場合には近似解と厳密解の誤差が評価できるため，数値的検証法の事を精度保証付き数値計算と呼ぶこともある．数値的検証法では十分に精度の良い近似解を使った情報，例えば近似解の周りでの線形化方程式に対する各種の情報などを計算できるため，手計算では手に負えないような情報も計算機を用いて計算できる場合がある．そのさらなる研究のためには数値的検証法を適用できる方程式の種類を増やす事が強く望まれ，多くの研究者にとってより計算し易い手法を開発することが重要である．申請者は楕円型境界値問題に対する数値的検証法の開発，特に近似解の離散化誤差の定量的な評価とそれを用いた高精度な解の検証法の提案を行うなどの成果をあげている (⟨1⟩ など)．本計画は数値的検証法のさらなる発展のために，特異性を持つ非線形積分方程式に対する解の検証法を開発するものである．

2. 研究の目的

数値的検証法の理論を構築するためには近似解に含まれる誤差を全て評価する事が必要である．これらの誤差は次のように階層的に分類する事が出来る．

1. シミュレーションを行う対象となる自然現象や社会現象を記述する数学モデルが，実際の現象を正しく表現できないことによる誤差 (**モデル化誤差**).
2. 計算機で数学モデルを厳密に解くことが出来ないために，数学モデルを近似する際に生じる誤差 (**離散化誤差**).
3. 計算機内で扱える数値が有限桁であるために生じる誤差 (**丸め誤差**).

これらの誤差で数値的検証法において評価が必要となるものは離散化誤差と丸め誤差である．申請者らが開発している数値的検証法では離散化誤差を理論的に評価 (事前誤差評価) を行い，丸め誤差については区間演算を用いて厳密な計算結果を保証する区間を計算している．特に，丸め誤差については計算機で把握することが出来る誤差なので，特異性があっても従来の検証理論で対応できる誤差となる．一方，離散化誤差は離散化手法によって異なり，それに応じた誤差評価が必要となる．よって，本研究により克服すべき課題は

(P1) 特異性を持つ積分方程式に対応した離散化誤差の評価

(P2) 新しく求めた誤差評価を元に検証理論を構築

(P3) 新しい検証理論の有効性を確認するために具体的な特異性を持つ非線形積分方程式の解の検証を行う

の 3 点となる．特に，本研究では積分核が log スケールで発散する特異点を持つ非線形積分方程式に対し，その解の存在を検証する理論の構築を目指す．すなわち，Fréchet 微分可能な非線形関数 $f(u)$ に対し，

$$u(x) = \int_\Omega \log|x-y|\, f\big(u(y)\big)\, dy \tag{0.1}$$

をみたす u の検証条件を求める事がひとつの応用になる．(0.1) の様な積分方程式は，例えば非圧縮性流体の運動方程式から導かれる渦度方程式で現れる．他にも多くの応用が期待できる．

3. 研究の方法

本研究計画では，わが国の第一線研究者から研究協力を得ることにより，離散化手法の選定，離散化誤差の評価，丸め誤差の効率的な評価方法を有効的に組み合わせることにより，特異性を持つ非線形積分方程式

の数値的検証法の理論構築を進める．実施内容を年度別に述べれば以下の様になる：

2011 年度　研究目的で挙げた課題 (P1) から (P3) を克服するための調査，実験を行う．

2012 年度　引き続き離散化手法の調査，数値実験を継続し，離散化誤差の定量的な評価を検討する．

2013 年度　新しく求めた誤差評価を元に，検証手法の開発を進める．

2014 年度　具体的な問題に対する検証結果を進め，報告書を作成する．

また，随時プログラムを作成，数値実験を行い，新しい結果が出た場合には適宜論文を執筆し，国際雑誌に投稿する．特に参考文献 ⟨2⟩ による岡山らのアイデア，すなわち二重指数関数型数値積分を用いた数値計算は特異性を持つ積分方程式に対しても有効であると知られており，この手法を元に数値的検証法の理論を構築する事はきわめて有望であると思われる．

4. 研究成果

当初計画していた ⟨2⟩ の評価に基づく積分方程式に対するの解の検証手法の開発は他の研究者も注目しており，全く同じ研究方針の研究発表が国内の研究集会であった．そこで本研究では (0.1) と同値な特異性を持つ微分方程式に対する解を検証する手法の開発を行う事に計画を変更した．微分方程式の解の検証は近似解での線形化作用素の可逆性が利用できれば比較的容易となる．したがって，線形化作用素の可逆性を検証する事が主な研究課題となる．

(1) 主な成果

①　微分方程式の特異性を回避するために射撃法で常微分方程式の境界値問題を解く方法を試みた．その際必要となる非線形初期値問題の線形化作用素の逆作用素に対する評価法の開発を行った [1]．また，本結果を利用して非線形初期値問題に対する解の存在を検証する手法の開発も検討している．本検証手法では Runge-Kutta 法などの離散変数法による近似解を利用できる点が特徴でり，安定性の高い解法や保存則をみたす解法を使う事ができる．

②　これまでに知られている線形楕円型化作用素の可逆性の検証および逆作用素のノルムを評価する方法を再考した．[4] では線形化逆作用素の近似を考察する事で，従来よりも高精度なノルム評価が可能となった．また，[6] では楕円型作用素の可逆性の基礎となる理論を変更する事で [4] よりも仮定が少ない状況で検証法を開発する事に成功した．本検証手法を推し進めて楕円型作用素に摂動を加えて逐次可逆性を検証する手法を考案した．摂動法を使った検証法は今後論文で公表する予定である．

③　[2, 5, 7] では線形放物型作用素の逆作用素に対する有限要素近似とその事前誤差評価，また，それを用いた逆作用素ノルムの評価を行った．初期境界値問題に対する解の検証法はまだ実用的なものがなく，今後の研究が不可欠となる．

(2) 今後の展望

非線形初期値問題に対する解の検証は [1] の情報を利用して構築する事ができる．射撃法による境界値問題の検証を行うためにはこれを用いればよいが，本研究で対象とした特異性を持つ微分方程式は解の一部が非常に大きな傾きを持っているので，これが成功するか定かではない．

摂動法を使った線形楕円型作用素の可逆性は，特異性の現れない所までの摂動に対しては上手く機能している．この事実から通常用いられるの関数空間には本研究で対象とした微分方程式の解が存在しない可能性がある．これに対応する為には例えば重み付き関数空間で解を探す必要があるが，この空間は楕円型作用素の理論では扱えず，従来の精度保証付き数値計算の理論が適用できない．本研究で対象とした最高階微分に特異性が入った微分方程式を扱うためには精度保証付き数値計算の理論の基礎的な部分から構築し直す必要があると予想される．

今回の研究課題は当初予想していたより難しいものであった．また，途中で研究方法の変更を余儀なくされたが，派生した問題で幾つかの研究成果を上げる事ができた．

＜引用文献＞

⟨1⟩ Takehiko Kinoshita and Mitsuhiro T. Nakao: On very accurate enclosure of the optimal constant in the a priori error estimates for H_0^2-projection, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **234** (2010), 526–537

⟨2⟩ 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顯, 第二種積分方程式に対する Sinc 選点法の改良とその理論解析, 日本応用数理学会論文誌, **20** (2010), 71–113.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 7 件)

[1] Takehiko Kinoshita, Takuma Kimura and Mitsuhiro T. Nakao: A posteriori estimates of inverse operators for initial value problems in linear ordinary differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **236** (2011), no. 6, 1622–1636, 査読有
DOI: 10.1016/j.cam.2011.09.026

[2] Mitsuhiro T. Nakao, Takehiko Kinoshita and Takuma Kimura: On a posteriori estimates of inverse operators for linear parabolic initial-boundary value problems, *Computing* **94** (2012), no. 2, 151–162, 査読有
DOI: 10.1007/s00607-011-0180-x

[3] Takehiko Kinoshita and Mitsuhiro T. Nakao: Some remarks on the optimal L^2 error estimates for the finite element method on the L-shaped domain, *Proceedings of the 2013 10th ITNG* (2013), 173–178, 査読有
DOI: 10.1109/ITNG.2013.30

[4] Yoshitaka Watanabe, Takehiko Kinoshita and Mitsuhiro T. Nakao: A posteriori estimates of inverse operators for boundary value problems in linear elliptic partial differential equations, *Mathematics of Computation* **82** (2013), 1543–1557, 査読有
DOI: 10.1090/S0025-5718-2013-02676-2

[5] Mitsuhiro T. Nakao, Takuma Kimura and Takehiko Kinoshita: Constructive a priori error estimates for a full discrete approximation of the heat equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **51** (2013), no. 3, 1525–1541, 査読有
DOI: 10.1137/120875661

[6] Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe and Mitsuhiro T. Nakao: An improvement of the theorem of a posteriori estimates for inverse elliptic operators, *Nonlinear Theory and Its Applications* **5** (2014), no. 1, 47–52, 査読有
DOI: 10.1588/nolta.5.47

[7] Takehiko Kinoshita, Takuma Kimura and Mitsuhiro T. Nakao: On the a posteriori estimates for inverse operators of linear parabolic equations with applications to the numerical enclosure of solutions for nonlinear problems, *Numerische Mathematik* **126** (2014), 679–701, 査読有
DOI: 10.1007/s00211-013-0575-z

〔学会発表〕(計 27 件)

[1] Takehiko Kinoshita, Takuma Kimura and Mitsuhiro T. Nakao: A posteriori estimates of inverse linear ordinary differential operators, East Asia SIAM Conference (Jun. 29, 2011) Kitakyushu, Japan

[2] 木下武彦，渡部善隆，中尾充宏: 線形楕円型偏微分作用素の逆作用素に対する高精度な事後評価について, 日本応用数理学会年会 (2011 年 9 月 16 日) 同志社大学

[3] 木下武彦，渡部善隆，中尾充宏: 線形楕円型偏微分作用素の逆作用素に対する事後誤差評価について, 日本数学会秋季総合分科会 (2011 年 10 月 1 日) 信州大学

[4] 渡部善隆，木下武彦，中尾充宏: Orr-Sommerfeld 方程式に対する局所一意性付き計算機援用証明, 日本数学会秋季総合分科会 (2011 年 10 月 1 日) 信州大学

[5] Takehiko Kinoshita: A numerical enclosure method of solutions for initial value problems of nonlinear ordinary differential equations, Workshop on reliability in scientific computing and related topics (Nov. 25, 2011) Nagasaki, Japan

[6] 木下武彦: 線形化逆作用素を用いた非線形常微分方程式系に対する解の検証理論, GCOE tea time (2011 年 12 月 13 日) 京都大学数理解析研究所

[7] 木下武彦，中尾充宏，木村拓馬: 線形放物型逆作用素に対する事後評価について, 応用数学合同研究集会 (2011 年 12 月 15 日) 龍谷大学

[8] 木村拓馬，木下武彦，中尾充宏: 斉次初期境界条件を備えた熱方程式に対する時間補間を用いた Galerkin 近似の構成的事前誤差評価, 日本応用数理学会春の研究部会連合発表会 (2012 年 3 月 8 日) 九州大学

[9] 木下武彦，木村拓馬，中尾充宏: 斉次初期境界条件を備えた線形放物型逆作用素に対する時間補間 Galerkin 近似を用いた事後評価, 日本応用数理学会春の研究部会連合発表会 (2012 年 3 月 8 日) 九州大学

[10] 木下武彦，中尾充宏，木村拓馬: 線形放物型逆作用素に対する事後評価について, 日本数学会年会 (2012 年 3 月 29 日) 東京理科大学

[11] Takehiko Kinoshita and Mitsuhiro T. Nakao: Some remarks on the optimal L^2 error estimates for the finite element method with nonconvex polygonal domain, East Asia SIAM Conference (Jun. 27, 2012) National Taiwan University, Taiwan

[12] Takehiko Kinoshita: A numerical verification method of solutions for initial value problems of nonlinear ODEs, China-Japan-Korea Conference on Numerical Mathematics (Aug. 25, 2012) Otsu City, Shiga

[13] 木下武彦，木村拓馬，中尾充宏: 線形化逆作用素を用いた非線形常微分方程式系に対する解の検証方法について, 日本応用数理学会年会 (2012 年 8 月 31 日) 稚内全日空ホテル

[14] 木下武彦，木村拓馬，中尾充宏: 線形化逆作用素を用いた非線形常微分方程式系の初期値問題に対する解の検証方法, 日本数学会秋季総合分科会 (2012 年 9 月 21 日) 九州大学

[15] 木下武彦: 非線形常微分方程式系に対する精度保証付き数値計算, 白浜研究集会 (2012 年 12 月 4 日) 南紀白浜旅館むさし

[16] 木下武彦: 非線形常微分方程式系に対する差分法の精度保証付き数値計算, 日本応用数理学会 3 部会連携応用数理セミナー (2012 年 12 月 25 日) 東京大学

[17] 木下武彦: 非線形常微分方程式系に対する精度保証付き数値計算のサーベイ

, 数理科学と諸数学・産業との連携研究ワークショップ (2013 年 1 月 24 日) 京都大学

[18] 木下武彦，渡部善隆，中尾充宏: 楕円型偏微分作用素の可逆性の検証について, 日本数学会年会 (2013 年 3 月 22 日) 京都大学

[19] Takehiko Kinoshita and Mitsuhiro T. Nakao: Some remarks on the optimal L^2 error estimates for the finite element method on the L-shaped domain, ITNG (Apr. 15, 2013) Las Vegas, Nevada, USA

[20] 木下武彦，渡部善隆，中尾充宏: 楕円型偏微分作用素に対する逆作用素評価の効率化, 日本応用数理学会年会 (2013 年 9 月 10 日) アクロス福岡

[21] 渡部善隆，木下武彦，中尾充宏: 線形作用素に対する可逆性の検証と精度保証付きノルム評価の改良について, 日本数学会年会 (2014 年 3 月 18 日) 学習院大学

[22] Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe and Mitsuhiro T. Nakao: An alternative approach of invertibility verifications and norm estimations for linear elliptic operators, The 7th CREST-SBM International Conference INVA2014 (Mar. 20, 2014) Kyoto University, Kyoto, Japan

[23] Takehiko Kinoshita: A posteriori estimates for inverse elliptic operators, Kyoto University-Chung-Ang University Symposium, On Nonlinear Partial Differential equations (Mar. 21, 2014) Takayama, Gifu Prefecture, Japan

[24] 木下武彦: 線形楕円型逆作用素の事後評価とその応用, 岐阜数理科学セミナー (2014 年 5 月 16 日) 岐阜大学

[25] 渡部善隆，木下武彦，中尾充宏: 2 階楕円型作用素における構成的 Laplacian ノルム評価, 日本応用数理学会年会 (2014 年 9 月 3 日) 政策研究大学院大学

[26] Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe and Mitsuhiro T. Nakao: Some remarks on the rigorous estimation of inverse linear elliptic operators, SCAN (Sep. 23, 2014) University of Würzburg, Germany

[27] 渡部善隆，木下武彦，中尾充宏: 線形楕円型作用素に対する Laplacian ノルムの構成的評価, 日本数学会年会 (2015 年 3 月 24 日) 明治大学

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

6．研究組織

(1) 研究代表者
木下 武彦 (KINOSHITA, Takehiko)
京都大学・学際融合教育研究推進センター・特定講師
研究者番号：30546429

(2) 研究分担者
( )

研究者番号：

(3) 連携研究者
( )

研究者番号：