

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 23 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740076

研究課題名(和文)小さな非可算基数に関する反映原理について

研究課題名(英文)On reflection principles at small uncountable cardinals

研究代表者

酒井 拓史 (Sakai, Hiroshi)

神戸大学・システム情報学研究科・准教授

研究者番号：70468239

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円、(間接経費) 780,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、小さな非可算基数に関する反映原理について、それらの無矛盾性、およびそれらと無限組み合わせ論・強制法公理・巨大基数公理との関係を調査し、以下のような成果を得た：(1) アレフ<sub>2</sub>に関するどのような反映原理から、どの程度の弱スクエア原理の否定が出るかを明らかにした。(2) アレフ<sub>2</sub>に関するいかなる定常性反映原理からも MA<sup>+</sup> (sigma-closed) という強制法公理が導かれないことを示し、反映原理と定常性反映原理の差異を明確にした。(3) 構成可能性ユニヴァース $L$ では、定常性反映原理の階層と、記述不可能基数の階層に対応があることを証明した。

研究成果の概要(英文)：I investigated reflection principles at small uncountable cardinals, in particular, their consistencies and their relationships with infinite combinatorics, forcing axioms and large cardinal axioms. Among other things, the following results were obtained: (1) I clarified how weak square principles are denied by each reflection principle at  $\omega_2$ . (2) By showing that the forcing axiom MA<sup>+</sup> (sigma-closed) does not follow from any variation of stationary reflection principles at  $\omega_2$ , I clarified the difference between reflection principles and forcing axioms. (3) It was proved that in  $L$  there is a correspondence between hierarchies of stationary reflection principles and indescribable cardinals.

研究分野：公理的集合論

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：公理的集合論 反映原理 巨大基数公理 無限組み合わせ論

### 1. 研究開始当初の背景

反映原理とは、様々な数学的構造を持つ性質が、濃度(サイズ)の小さな部分構造に反映されることを主張する、一連の命題を指す。特に濃度未満の部分構造に反映することを主張するものを、 $\aleph_1$ に関する反映原理と呼ぶ。アレフ0に関しては、様々な反映原理が成立することが、述語論理のコンパクト性定理より導かれ、また  $\aleph_1$  がコンパクト基数などの巨大基数であることから、 $\aleph_1$ に関する様々な反映原理が自然に導かれる。

巨大基数は非常に大きな基数であるが、「アレフ1・アレフ2・アレフ3といった小さな非可算基数に対して、どのような反映原理が(集合論の標準的公理系 ZFC と)無矛盾であるか?」、また「小さな非可算基数に関する反映原理は実数の構造などに関してどのような帰結を持つか?」、という問題は古くから考察されている。特にアレフ2に関する反映原理については、非常に強いものの無矛盾が巨大基数公理の無矛盾性から導かれること、およびそれらは実数の濃度に制限を与えたり決定したりすることが知られており、多くの集合論研究者によって興味を持たれている。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、小さな非可算基数に関してどのような反映原理が無矛盾であるか、およびそれらの無限組み合わせ論に及ぼす帰結を詳しく調べることであり、具体的には以下の (1), (2), (3) が研究テーマであった:

(1) アレフ2に関する反映原理と巨大基数公理の関係:

アレフ2に関する非常に強い反映原理の無矛盾性は超コンパクト基数公理の無矛盾性から保証される。一方で、これらの反映原理の無矛盾性に超コンパクト基数公理の無矛盾性がどうかは、大きな未解決問題となっている。アレフ2に関する反映原理から得られる無限組み合わせ論の帰結を調べることで、この問題に迫る。

(2) アレフ2に関する反映原理とアレフ1上のイデアルの関係:

アレフ2に関する定常性反映原理からは、アレフ1上の非定常イデアルがプレシピタスになることが帰結される。アレフ1上の他の様々なイデアルに対しても、そのプレシピタス性を導くアレフ2に関する反映原理が定式化できるかどうかを調べる。

(3) アレフ2より大きな基数に関する反映原理の無矛盾性:

アレフ2に関しては、非常に強い反映原理の無矛盾性が超コンパクト基数公理の無矛盾性から保証されるが、(巨大基数以外の)アレフ3以上の非可算基数に対しては、その

ような強い反映原理は矛盾することが知られている。アレフ3以上の非可算基数に関して、どの程度強い反映原理の無矛盾性が巨大基数公理の無矛盾性から導かれるかを調べる。

### 3. 研究の方法

小さな非可算基数に関する反映原理の無矛盾性は、巨大基数公理の無矛盾性から、強制法を用いて導かれる。もう少し具体的には、巨大基数公理が成り立つ(ZFCの)モデルから、その巨大基数を小さな非可算基数に崩壊する強制法によって、小さな非可算基数に関する反映原理のモデルが得られる。これらの具体的なモデルで、どのような反映原理が成立するかを精査することで研究の目的の達成を目指した。また小さな非可算基数に関する反映原理は、Martin's Maximumなどの強い強制法公理から導かれ、また無限組み合わせ論に様々な帰結を持つ。反映原理と強制法公理および無限組み合わせ論の関係にも着目して研究を進めた。

研究は、研究集会や研究者訪問を通じて、国内外の集合論研究者と議論を重ねることで進めた。特に、「2. 研究の目的」で挙げた (1)-(3) のそれぞれで、以下の研究者と共同研究を行った:

- (1) Boban Velickovic 教授(パリ第7大学)・Matteo Viale 研究員(トリノ大学)
- (2) Saharon Shelah 教授(ヘブライ大学)・Jacob Kellner 准教授(ウィーン大学)
- (3) Joan Bagaria 教授(バルセロナ大学)・Menachem Magidor 教授(ヘブライ大学)

### 4. 研究成果

「2. 研究の目的」に述べた (1)-(3) の項目について得られた成果を、それぞれ以下に述べる。なお以下では、後述の「5. 主な発表論文等」の論文や発表を参照し、[雑誌論文]や[学会発表]は後述のこの項目のものを指す:

(1) アレフ2に関する反映原理と巨大基数公理の関係:

強制法公理 Martin's Maximum やアレフ2に関する定常性反映原理の無矛盾性は、超コンパクト基数公理の無矛盾性の仮定から、強制法を用いて導かれる。また、このときに用いられる強制法は、approximation property と covering property と呼ばれる性質を持つ。トリノ大学の Viale 研究員とカリフォルニア大学アーバイン校の Weiss 研究員は、これらの性質を持つ強制法で Martin's Maximum の無矛盾性を示すには、強コンパクト基数公理の仮定が必要であることを証明した。また研究代表者とパリ第7大学の Velickovic 教授は、アレフ2の定常性反映原理に強制法公理 Martin's Axiom を付け加え

たものの無矛盾性に対しても同様であることを、本研究開始前に証明していた（『雑誌論文』に収録）。Viale-Weiss および研究代表者-Velickovic の結果において、“強コンパクト基数公理の無矛盾性”を“超コンパクト基数公理無矛盾性”に強められるかどうかは問題になっていた。研究代表者は、Viale-Weiss の証明の鍵となるひとつの事実が、Martin's Maximum の無矛盾性を得る標準的なモデルでは成立しないことを証明し、この問題が簡単には解決できそうに無いことを示した（『雑誌論文』）。

巨大基数公理の無矛盾性と関係する無限組み合わせ論の命題に、弱スクエア原理と呼ばれる一連の命題がある。弱スクエア原理の否定の無矛盾性は、巨大基数公理の無矛盾性を導くことが知られており、特に特異基数における弱スクエア原理の否定からはウディン基数などの強い巨大基数公理の無矛盾性が導かれる。本研究で研究代表者は、反映原理からどのような弱スクエア原理が否定されるかどうかを組織的に調べた。

まず、アレフ2に関する半定常性反映原理からは、Martin's Maximum とほぼ同様の弱スクエア原理の否定が導かれることを示した（『学会発表』、論文投稿予定、プレプリント“Semi-stationary reflection and weak square”をホームページで公開中）。またチャング仮説と呼ばれるアレフ2に関する反映原理についても調査し、これからは最も強いスクエア原理の否定以外は導かれないことを証明した（『雑誌論文』）。

## (2) アレフ2に関する反映原理とアレフ1上のイデアルの関係：

アレフ2に関する定常性反映原理は、レヴィ崩壊という強制法を用いて超コンパクト基数をアレフ2に崩壊したモデルで成立する。ヘブライ大学の Shelah 教授は、「超コンパクト基数をアレフ2にレヴィ崩壊すると、アレフ1上の定義可能なイデアルは全てプレシピタスになる」ということの証明のアイデアをノートとして書いていた。2011年8月に、研究代表者はウィーン大学の Kellner 准教授とともにヘブライ大学を訪れ、Shelah 教授とともにこの証明の完成を試みた。

証明の完成には至らなかったが、Shelah 教授のアイデアだけでは証明はできず、新たなアイデアもしくはより強い仮定が必要であることを確認した。また、超コンパクト基数をアレフ2にレヴィ崩壊したモデルでは、アレフ1からアレフ1への関数を用いて定義されるイデアルはプレシピタスになっていないのではないかという予想を得た。

アレフ2に関する定常性反映原理は、 $MA^{\aleph_2}$  (sigma-closed) と呼ばれる強制法公理

から導かれることが知られている。一方で、研究代表者はアレフ2に関する定常性反映原理のいかなるバリエーションからも、 $MA^{\aleph_2}$  (sigma-closed) は導かれないことを証明した（『学会発表』、論文を現在投稿中）。 $MA^{\aleph_2}$  (sigma-closed) はアレフ1上の非定常イデアルと密接な関係を持つが、定義可能なアレフ1上の各イデアルに対して、 $MA^{\aleph_2}$  (sigma-closed) のバリエーションを考えることができる。アレフ1上のイデアルのプレシピタスには、反映原理よりも、より強い  $MA^{\aleph_2}$  (sigma-closed) のバリエーションの方が、密接に関係するのではないかという着想を得た。

またこの結果は、定常性反映原理と強制法公理の差異を明確にするもので、意義のある結果であると考えられる。

## (3) アレフ2より大きな基数に関する反映原理の無矛盾性：

Godel の構成可能性ユニヴァース  $L$  では、正則基数  $\kappa$  で定常性反映原理が成立すること、 $\kappa$  が弱コンパクト基数という巨大基数であることが、同値となることが Jensen によって証明されていた。また近年、定常性の概念を一般化した  $n$ -定常性という概念が証明論に関連して定式化され注目されている。なお、1-定常性は通常の定常性と同じになる。

研究代表者は、バルセロナ大学の Bagaria 教授およびヘブライ大学の Magidor 教授とともに Jensen の結果を一般化し、構成可能性ユニヴァース  $L$  では、基数  $\kappa$  で  $n$ -定常性の反映原理が成立すること、 $\kappa$  が  $\Pi_1^{n-1}$ -記述不可能基数であることが、同値であることを証明した（『雑誌論文』）。なお、 $\Pi_1^{n-1}$ -記述不可能基数であることは弱コンパクト基数であることと同値であり、 $n$  が大きくなるに従って  $\Pi_1^{n-1}$ -記述不可能基数は大きくなる。

上記の結果は巨大基数に関わるものであるが、一般に  $n$  を自然数としたとき、アレフ  $n$  では  $(n-1)$ -定常性の反映原理までが自然に考えられる。アレフ3以上の十分強い反映原理の無矛盾性を考えるときには、超コンパクト基数公理より強い巨大基数の無矛盾性の仮定が必要になるかもしれないとの着想が、この結果より得られた。

アレフ3に関する定常性反映原理と強チャング仮説について調べた。これらは、超コンパクト基数公理をアレフ3にレヴィ崩壊したモデルで成立し、よってこれらの無矛盾性は超コンパクト基数公理の無矛盾性から導かれる。一方で、アレフ2に関する様々な反映原理を導く Martin's Maximum からは、アレフ3に関するこれらの反映原理は導かれないことを証明した。これにより、アレフ3に関するこれらの反映原理が、アレフ2に

関する反映原理と明確に異なり, またアレフ3の強い巨大基数性を導くものであることが, 明らかになった(プレプリント “Martin’s Maximum and stationary reflection at  $\omega_3$ ” をホームページで公開中).

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

J. Bagaria, M. Magidor and H. Sakai, “Reflection and indescribability in the constructible universe”, Israel Journal of Mathematics に掲載決定, 査読有.

H. Sakai and B. Velickovic, “Stationary reflection principles and two cardinal tree properties”, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu に掲載決定, 査読有.

H. Sakai, “Chang’s conjecture and weak square”, Archive for Mathematical Logic, Vol.52, No.1-2, pp.29-45, 2013, 査読有.

M. Kikuchi, T. Kurahashi and H. Sakai, “On proofs of the incompleteness theorems based on Berry’s paradox by Vopenka, Chaitin, and Boolos”, Mathematical Logic Quarterly, Vol.58, No.4-5, pp.307-316, 2012, 査読有.

H. Sakai, “Partial square at  $\omega_1$  is implied by MM but not by PFA”, Fundamenta Mathematicae, Vol.215, No.2, pp.109-131, 2011, 査読有.

H. Sakai, “On standard model of Martin’s Maximum”, 京都大学数理解析研究所講究録 No.1754, pp.97-107, 2011, 査読無し.

[学会発表](計8件)

H. Sakai, “Separation of  $MA^+$  ( $\sigma$ -closed) from reflection principles”, ESI Workshop Forcing and Large Cardinals, Erwin Schrodinger Institute, ウィーン(オーストリア), 2013年9月24日.

H. Sakai, “ $n$ -stationary and  $\Pi^1_{n-1}$ -indescribable sets”, RIMS 共同利用研究集会 反映原理と巨大基数の集合論, 京都大学数理解析研究所, 2013年9月11日.

H. Sakai, “Separation of  $MA^+$  ( $\sigma$ -closed) from reflection principles”, International Conference on Topology and Geometry 2013, 島根大学, 2013年9月5日.(招待講演)

待講演)

酒井 拓史, “定常性反映原理と半定常性反映原理”, 日本数学会年会, 京都大学, 2013年3月21日.(特別講演)

H. Sakai, “Consequences of Martin’s Maximum and weak square”, Workshop of Forcing Axioms and their Applications, Fields Institute, トロント(カナダ), 2012年10月24日.(招待講演)

H. Sakai, “Fragments of Martin’s Maximum and weak square”, Association for Symbolic Logic 2012 North American Annual Meeting, University of Wisconsin-Madison, マディソン(アメリカ), 2012年3月31日.(招待講演)

H. Sakai, “Chang’s conjecture and weak square”, the 12th Asian Logic Conference, Victoria University of Wellington, ウェリントン(ニュージーランド), 2011年12月17日.

H. Sakai, “Chang’s conjecture and weak square”, RIMS 共同利用研究集会 記述集合論の展望, 京都大学数理解析研究所, 2011年10月20日.

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

[その他]

ホームページ等

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~hsakai/>

<http://researchmap.jp/hsakai/>

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

酒井 拓史(SAKAI, Hiroshi)

神戸大学・大学院システム情報学研究所・准教授

研究者番号: 70468239

(2)研究分担者

無し

(3)連携研究者

無し