様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１５３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４００７９

研究課題名（和文）非線形偏微分方程式に現れる集中・振動現象の研究

研究課題名（英文）Concentration phenomena arising in nonlinear partial differential equations

研究代表者
大下　承民（Oshita, Yoshihito）

岡山大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：７０４２１９９８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：ポテンシャルがユークリッド空間における滑らかでコンパクトな framed 部分多様体上で０となるような臨界周波数の場合を考察した。臨界周波数の場合に，ポテンシャル関数の零点の連結成分がコンパクトで滑らかなframed部分多様体であるものが複数個ある場合に，それぞれの多様体から離れると指数的に減衰していて，各多様体のまわりでの解の極限プロファイルはその余次元と同じ次元の空間における正値球対称解となっているような正値解について考察した。リャプノフ・シュミットの縮約法を用いることにより，上の条件を満たす正値解を持つような微小パラメーターの値で０に近づく列が存在することを示した。

研究成果の概要（英文）： We consider the equation nonlinear elliptic equations on Euclidean space, and study the case that the potential vanishes on a finite number of smooth compact framed sub manifolds in a critical frequency case. When the connected components of zero sets of the potential function are compact smooth framed manifolds, we consider the positive solutions which concentrates on the zero level manifolds, and that its limiting profiles are positive radially symmetric solutions in the space of the same dimension as the codimensions of the zero level manifolds.
Using Lyapunov--Schmidt reduction method, for a sequence of ε converging to zero, we will find a positive solution of the equation .

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：楕円形方程式

１．研究開始当初の背景

ポテンシャル関数をもつ非線形楕円形偏微分方程式の特異摂動問題における空間的に局在化した解の研究は，Floer—Weinstein によるリャプノフ・シュミット法を用いた先駆的仕事の中で，一個のバンプを持つ正値解の存在が示された。その後このアプローチにより更に多くの結果が得られた。一方もっと一般の非線形関数のクラスに対して Rabinowitz により変分法を用いたアプローチが提案されその後この方法もさらなる発展を続け，ポテンシャル関数と非線形関数に関するさまざまな仮定の下で，１点または複数の点のごく近傍に集中した解が構成されている。

ポテンシャル関数の下限が正の場合，微小パラメーターを０に近づけると，解をリスケール変換した関数は，ある極限問題の一意球対称正値解へ収束するため，ポテンシャル関数の正の臨界点のまわりに集中した解のピークの高さ（振幅）の下極限は正である。
一方，ポテンシャル関数の最小値が０である臨界周波数の場合にも，Byeon—Wang により，ポテンシャル関数の零点のまわりに集中した解の存在が示された。この場合，ポテンシャル関数の下限が正の場合とは全く対照的に，ポテンシャル関数の最小点のまわりに局在化した解の振幅とエネルギーは０に減衰し，その減衰率は，ポテンシャル関数の０への減衰の挙動に微妙に依存する。また，ポテンシャル関数の０への減衰の挙動が，十分に非正則であるならば，対応する極限問題は存在しないかもしれない。そのような場合，解の振幅とエネルギーを正確に評価することは非常に難しい。そのため複数の局在化した解を張り合わせることも難しくなる。

一方，Ambrosetti—Malchiodi—Ni らによりポテンシャル関数が球対称である場合に，ある球面上に集中した球対称解の存在が示された。さらに彼らは，球対称ではない場合にも多様体上に集中した解が少なくとも０に収束する微小パラメーターのある列に対しては存在するのではないかと予想した。その後，Del Pino—Kowalczyk—Wei により，２次元の場合に，非退化な閉測地線上に集中した解の存在が示されている。さらに２次元空間において Kowalczyk—Wei により重み付き長さ汎関数の非退化臨界曲線の上に集中した解の存在が示された。

２．研究の目的

本研究の目的は，非線形楕円型偏微分方程式の解の部分多様体への集中現象等，非線形偏微分方程式における種々の集中現象を，変分法，リャプノフ・シュミットの縮約法，分岐理論，不変多様体理論，漸近展開法等の手法により解明することである。
ボーズ・アインシュタイン凝縮や，非線形光学材料における光の伝播の記述等に現れる非線形シュレディンガー方程式の半古典状態と呼ばれる定在波解を考察する。この基底状態に対応する非線形シュレディンガー方程式の定在波解を数学的に考察することは，ポテンシャル関数を持つ非線形楕円型偏微分方程式の特異摂動問題に帰着する。

変分法，リャプノフ・シュミットの縮約法あるいはそれらを組み合わせることにより，

（１）　極小曲面のような一般の部分多様体上に集中した解が存在するか？
（２）ポテンシャル関数の零点の連結成分が複数あり，その１つ１つが，コンパクトで滑らかな部分多様体となっている，または，ポテンシャル関数が正の臨界点を持つ場合に，それぞれのまわりに集中した解を張り合わせることができるか？
（３）　ポテンシャル関数が無限遠で０に減衰する場合にもいくつかの点のまわりに集中した解が存在するか？
（４）ポテンシャル関数が無限遠で非有界の場合，ポテンシャルの零点や特異点のまわりに集中した解は存在するか？

などの問題を考察して集中現象を解明する。

３．研究の方法

非線形楕円型偏微分方程式における集中現象を変分法，リャプノフ・シュミットの縮約法，分岐理論，漸近展開法等の手法を用いて解明する。不動点定理を用いて極限問題の解を貼りあわせることにより複数の多様体に集中した解を構成する。
微小パラメーターを０に近づける極限（半古典状態）の最も特徴的な性質である，解の集中現象を解明する。特に，ポテンシャル関数と非線形関数に関するさまざまな仮定の下でリャプノフ・シュミットの縮約法を用いて，部分多様体または複数の点のごく近傍に集中した解を構成していく。

ポテンシャル関数の最小値が０の場合，ポテンシャル関数の最小点の連結成分が滑らか

なコンパクト部分多様体の場合に，ポテンシャル関数の最小点の連結成分のまわりに集中した解を，まず空間的に局所化した問題で考察する。近似解を構成するため，空間的に局所化した問題を考察する。

ポテンシャル関数の下限が正の場合とは全く対照的に，ポテンシャル関数の最小点のまわりに局在化した解の振幅とエネルギーは０に減衰し，その減衰率は，ポテンシャル関数の０への減衰の挙動に微妙に依存する。また，ポテンシャル関数の０への減衰の挙動が，非常に非正則ならば，対応する極限問題を持たないかもしれない。したがって極限問題を持つような適切な条件下を考察し，極限問題の解の非退化性を利用して任意のオーダーの近似解を構成する。また，近似解の周りでの線形化解析を行う。すなわち，線形化作用素が可逆であることを示し，逆作用素のノルムを評価するため，固有関数を多様体の接方向と法方向へフーリエ分解することで，小さい固有値の変化率を評価する。

極限問題は，多様体の余次元と同じ次元における全空間の楕円型方程式の問題になる。べき乗ポテンシャルに対する楕円型方程式の正値球対称解の一意性と非退化性を用いる。また近似解を構成するために，ポテンシャル関数の零点の多様体に近傍において，接方向と法方向の分解に対応した局所座標系を用いる。その局所化問題の解から，全空間において，真の解との誤差が指数的に減衰するような近似解を構成し，リャプノフ・シュミットの縮約法（縮小写像の原理）を用いて（すべての小さい微小パラメーターの代わりに）０に近づく微小パラメーターのある列に対して，真の解の存在を示す。

４．研究成果

ポテンシャル関数がユークリッド空間R^Nにおける q_k (1≦q_k≦N-1) (k=1,2,3,…,K) 次元の滑らかでコンパクトな framed 部分多様体 M_k(k=1,2,3, …,K)上で０となるような臨界周波数の場合を考察した。ここで部分多様体が framed であるとは，その法バンドルが自明であることをいう。この場合，ポテンシャルの零点集合の多様体は，ユークリッド空間のコンパクトな部分多様体の族の中で，ポテンシャル関数のある「べき」を重みにもつ体積汎関数の極小点になっている。臨界周波数の場合の極限問題は，ポテンシャル関数の下限が正の場合とはまったく異なる。

臨界周波数の場合に非自明な極限問題を得るためにはスケーリング変換が必要である。多様体上の点によらないスケーリングで極限問題を得るためにポテンシャル関数が多様体の近傍で多項式オーダーで減衰することを仮定する。以上のような臨界周波数の場合で，ポテンシャル関数の零点の連結成分がコンパクトで滑らかな framed 部分多様体であるものが複数個ある場合に，それぞれの多様体から離れると指数的に減衰していて，各多様体のまわりでの解の極限プロファイルはその余次元と同じ次元の空間における正値球対称解となっているような正値解について考察した。リャプノフ・シュミットの縮約法を用いることにより，上の条件を満たす正値解を持つような微小パラメーターの値で０に近づく列が存在することを示した。

また，べき乗ポテンシャルに対する正値解の一意性と非退化性の結果は，１次元空間において，既存の結果の拡張になっている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

Jaeyoung Byeon, Ohsang Kwon, Yoshihito Oshita, Standing waves concentrating on compact manifolds for nonlinear Schrodinger equations.
Communiocations on pure and applied analysis, 2015 (14), 825-842.
Doi: 10.3934/cpaa2015.14.825

〔学会発表〕（計４件）

Yoshihito Oshita, Concentration on compact manifolds for some nonlinear equations,
the 10th AIMS Conference on Dynamical Equations and Applications, Madrid, 2014/7/7-2014/7/11

大下承民,
複数の多様体上に集中したNLSの解,
岡山理科大学における微分方程式セミナー,
岡山理科大学, 2013/9/9

大下承民,
NLS に対するコンパクト多様体上への集中,
広島大学数学教室談話会, 広島大学,
2012/5/22

大下承民,
コンパクト多様体上への集中,
OCAMI 楕円型方程式研究集会～定常非線形シュレディンガー方程式の定在波解の研究～，大阪市立大学，2011/8/10

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者

大下承民（OSHITA YOSHIHITO）
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：70421998

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：