

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 19 日現在

機関番号：24402

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740083

研究課題名(和文) 飛躍型確率過程に対するマリアヴァン解析と密度関数についての研究

研究課題名(英文) Malliavin calculus for jump processes and studies on densities

研究代表者

竹内 敦司 (Takeuchi, Atsushi)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：30336755

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：右連続かつ左極限をもつ不連続曲線全体からなるウィーナー・ポアソン空間上でマリアヴァン解析を展開し、飛躍型確率過程に対する密度関数の性質を調べる研究に応用した。確率過程を特徴づけるパラメータに関する密度関数の対数微分は、マリアヴァン解析における部分積分公式から自然に導出されるが、実務的に取り扱われるファイナンスモデルに対して、数値計算を伴った研究結果を得た。更に、非マルコフ過程を定める確率関数微分方程式に対して、大偏差原理とマリアヴァン解析を融合させて、密度関数の漸近的な評価に関する研究結果を得た。過去の履歴の時間間隔パラメータが重要な役割を果たすという、大変興味深い結果である。

研究成果の概要(英文)：The Wiener-Poisson space is the family of right-continuous functions with left hand limits. I have applied the Malliavin calculus on the Wiener-Poisson space in order to study the properties on densities for jump processes. In the study, I could get the results on the logarithmic derivatives of densities with respect to some parameters, which characterize the process. And I have obtained the Greeks computations with numerical simulations on asset price dynamical models with jumps in mathematical finance. Furthermore, I studied the asymptotic behavior of densities for solutions to stochastic functional differential equations, whose current state depends on the past histories of the process. The most remarkable point is that the delay parameter of the stochastic functional differential equation plays a crucial role.

研究分野：確率解析

キーワード：マリアヴァン解析 ジャンプ過程 確率微分方程式 確率関数微分方程式 密度関数

1. 研究開始当初の背景

マリアヴァン解析とは通常、時間について連続な曲線全体の空間である「ウィーナー空間」の上での汎関数解析として捉えられることが多い。しかし確率過程論の立場からすると、レヴィ過程のような、右連続かつ左極限を持つような不連続な曲線全体の空間である「ウィーナー・ポアソン空間」の上で同様の汎関数解析の展開を目指すことは、非常に自然な問題意識である。また数理ファイナンスにおいても、現象の急激な変化も組み込んだ形でモデル化する立場で、近年活発に研究が行われている。

ウィーナー・ポアソン空間の上でのマリアヴァン解析において、考察すべき対象や目的に応じて幾つかの方法がよく知られている。研究代表者の竹内は、確率測度の変換（ギルザノフの定理）を基軸とした立場でマリアヴァン解析を展開し、飛躍型確率微分方程式の解の分布に関する密度関数の存在性および正則性について、これまで研究してきた。

2. 研究の目的

ウィーナー・ポアソン空間の上でのマリアヴァン解析を用いて、飛躍型確率微分方程式の解に対する密度関数の諸性質を調べることが、本研究課題の主な目的である。これまで取り組んできた研究では、密度関数の存在性と正則性のみに関心を当ててきたが、さらに一歩踏み込んだ研究として、密度関数に関する

- ・漸近的な性質、正值性
- ・パラメータに関する対数微分

の2点について、より詳細に調べてゆくことを特に目指したい。いずれのトピックスも、研究代表者の竹内がこれまで行ってきた研究の延長線上に位置付けられるものである。

(1) 密度関数の漸近的な性質、正值性：

与えられた確率過程に対して、その密度関数の漸近的な性質を調べることが目標に掲げた。考察の対象とする確率微分方程式の解に対する密度関数を、具体的な密度関数の表示が陽に分かっているような確率変数を持ち出して、その密度関数で近似し、それらの誤差評価の精密化を考えることによって、元の密度関数の性質を理解しようとするものである。誤差評価を詳細に行うことにより、密度関数の正值性の研究にも応用できると考えられる。

(2) 密度関数の対数微分：

確率過程を特徴づける各パラメータについて、密度関数の対数微分を考えることは、特に数理ファイナンスにおいて重要な問題となっている。リスク資産に対するオプション価格公式は、ペイオフ関数の期待値として

与えられる。この期待値の各パラメータに関する感応度解析は、「グリークス」と総称され、実務の立場からも重要視されている。それらのモデルをも含むような形で、飛躍型確率過程に対する密度関数の、各パラメータの対数微分について考える。

3. 研究の方法

マリアヴァン解析における重要なキーワードの一つは「部分積分公式」である。この公式を、従来とは異なるアプローチで再構築し、密度関数の漸近的な性質を引き出すことを目指した。密度関数の正值性の問題は、この研究の延長線上に位置しており、両方を合わせた形で研究を進めてきた。

研究代表者の竹内は、密度関数の存在性および正則性に関する一連の研究の中で、確率微分方程式の係数に関するヘルマンダー型条件との関係に焦点を当ててきた。本研究の中で、密度関数の各パラメータに関する対数微分の問題を、ヘルマンダー型条件と関連させた形で考察した。これは、数理ファイナンスにおいて、株価過程に対するエキゾチック・オプションや、確率ボラティリティ・モデルに対する感応度解析を意識したものである。

本研究課題と同じ方向を目指した研究は、国内外を見渡してそれほど多いものではないが、近年数理ファイナンスにおいて飛躍型確率過程が注目されているという世界的な流れから、いくつか行われてきており、今後その勢いは増してくると思われる。このような状況を考慮し、関連する研究者たちと互いの研究に関する連絡、情報交換を取りながら研究を推し進めてきた。具体的には、本研究期間（平成23年度～平成26年度）内に、

- ・関連分野の研究集会や国際会議等への参加および研究発表
- ・研究機関を一定期間訪問し、研究に関するディスカッションを行う。
- ・研究者の招聘

を行った。またこれらの活動と並行して、研究面での環境整備を図るために、関連する図書の購入やコンピュータ機器を充実させた。いずれも本研究の円滑な推進、発展には必要不可欠なものであった。

4. 研究成果

本研究期間（平成23年度～平成26年度）内で、以下のような研究成果が得られた。

(1) 飛躍の影響を伴ったリスク資産に対して、各パラメータに関するグリークスの計算と、モンテカルロ法による数値計算に関する興味深い結果を得ることに成功した。ここで取り扱ったモデルは、数理ファイナンスでよ

く用いられてきたブラック・ショールズ・モデルに飛躍の効果を加したものであり、実務的にもよく用いられるものである。その際、既存の結果の中で残され続けてきた「関数クラスの拡張」に関する問題を、数学的に解決することにも成功している。これにより、コール・オプションやプット・オプション、デジタル型オプションのペイオフ関数をも含めて取り扱うことが可能となった。

(2) ウィーナー・ポアソン空間の上でのマリアヴァン解析における部分積分公式は、飛躍の大きさに応じた近似によっても得られる。このアプローチによる数学的な枠組みの整理と、その応用に関するいくつかの研究結果が得られた。一つの応用として、密度関数の大域的な評価および正值性を得ることに成功した。評価はやや粗い部分もあるため、今後の研究では、その精密化を目指してゆく予定である。

(3) 確率関数微分方程式の解に対する密度関数についての研究も進めてきた。これまでの研究で取り扱ってきた確率微分方程式はマルコフ過程を定め、さまざまな解析的手法との美しい対応関係があったが、確率関数微分方程式は過去の履歴に依存するため、非マルコフ過程となる。そのため解析的な手法が全く使えず、密度関数の性質を調べることは非常に困難であった。本研究期間（平成23年度～平成26年度）内に、大偏差原理とマリアヴァン解析を融合させて、密度関数の漸近的な性質について、過去の履歴の時間間隔パラメータが重要な役割を果たすという、大変興味深い研究結果を得ることに成功した。飛躍を伴った方程式に対する考察は、今後の研究対象としてゆきたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計8件）

- ① A. Takeuchi:
Bismut formula for SDE with jumps, *The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report*, 査読無, No. **350**, 2015, pp. 74 – 78.
- ② A. Takeuchi:
Asymptotic behavior of densities for stochastic functional differential equations, *RIMS kokyuroku*, 査読無, No. **1903**, 2014, pp. 198 – 204.
- ③ A. Takeuchi:
Remark on the integration by parts formula on the Poisson space, *The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report*, 査読無,

No. **328**, 2014, pp. 105 – 109.

- ④ R. Kawai and A. Takeuchi:
Computations of Greeks for asset price dynamics with stable and tempered stable processes, *Quantitative Finance*, 査読有, Vol. **13**, 2013, pp. 1303 – 1316. DOI:10.1080/14697688.2011.589403
- ⑤ A. Takeuchi:
Strict positivity of densities for stochastic differential equations driven by gamma processes, *The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report*, 査読無, No. **300**, 2013, pp. 14 – 24.
- ⑥ A. Kitagawa and A. Takeuchi:
Asymptotic behavior of densities for stochastic functional differential equations, *International Journal of Stochastic Analysis*, 査読有, Vol. **2013**, 2013, pp. 1 – 17. DOI: 10.1155/2013/537023
- ⑦ A. Takeuchi:
Greeks formulas for asset price model with some Lévy processes, *The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report*, 査読無, No. **275**, 2012, pp. 8 – 16.
- ⑧ R. Kawai and A. Takeuchi:
Greeks formulae for an asset price model with gamma processes, *Mathematical Finance*, 査読有, Vol. **21**, 2011, pp. 723 – 742. DOI:10.1111/j.1467-9965.2010.00452.x

〔学会発表〕（計18件）

- ① A. Takeuchi:
Integration by parts formula and density for SDE with jumps, 京都大学談話会（招待講演）, 2014年12月3日, 京都大学（京都府・京都市左京区）.
- ② A. Takeuchi:
Bismut formula for SDE with jumps, 統計数理研究所共同研究集会「無限分解可能過程と関連する諸問題」, 2014年11月28日, 統計数理研究所（東京都・立川市）.
- ③ 竹内敦司:
ジャンプ型確率過程に対する部分積分公式, 日本数学会2014年度秋季総合分科会（招待講演）, 2014年9月25日, 広島大学（広島県・東広島市）.

- ④ A. Takeuchi:
Density for stochastic functional differential equations, 11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, 2014年7月1日, Vilnius (Lithuania).
- ⑤ A. Takeuchi:
Large deviation principle for stochastic functional differential equations, 日本数学会2014年度年会, 2014年3月15日, 学習院大学 (東京都・豊島区) .
- ⑥ A. Takeuchi:
Large deviation principle for stochastic functional differential equations, 研究集会「Stochastic Processes and Mathematical Finance」(招待講演), 2014年2月25日, 関西大学 (大阪府・吹田市) .
- ⑦ A. Takeuchi:
Asymptotic behavior of densities for stochastic functional differential equations, 数理解析研究所研究集会「確率論シンポジウム」, 2013年12月20日, 京都大学数理解析研究所 (京都府・京都市左京区) .
- ⑧ A. Takeuchi:
Remark on the integration by parts formula on the Poisson space, 統計数理研究所共同研究集会「無限分解可能過程と関連する諸問題」, 2013年11月12日, 統計数理研究所 (東京都・立川市) .
- ⑨ A. Takeuchi:
Asymptotic behavior of densities for stochastic functional differential equations, Bernoulli Society Satellite Meeting “Asymptotic Statistics and Related Topics: Theory and Methodologies”, 2013年9月3日, 東京大学 (東京都・文京区) .
- ⑩ A. Takeuchi:
Asymptotic behavior of densities for stochastic functional differential equations, 36th Conference on Stochastic Processes and their Applications, 2013年8月1日, Boulder (USA).
- ⑪ A. Takeuchi:
Large deviations for stochastic functional differential equations, micro-conference on Probability Theory and its Applications (招待講演), 2013年3月20日, Melbourne (Australia).
- ⑫ A. Takeuchi:
Strict positivity of densities for stochastic differential equations driven by gamma processes, 統計数理共同研究集会「無限分解可能過程と関連する諸問題」, 2012年11月8日, 統計数理研究所 (東京都・立川市) .
- ⑬ A. Takeuchi:
Positivity of densities for stochastic differential equations driven by gamma processes, 8th World Congress in Probability and Statistics, 2012年7月11日, Istanbul (Turkey).
- ⑭ A. Takeuchi:
Positivity of densities for solutions to stochastic differential equations driven by gamma processes, Stochastic Analysis and its Applications (招待講演), 2012年3月17日, 新潟大学 (新潟県・新潟市) .
- ⑮ A. Takeuchi:
Density of solutions to stochastic differential equations driven by gamma processes, 科研費シンポジウム「確率論シンポジウム」, 2011年12月21日, 関西大学 (大阪府・吹田市) .
- ⑯ A. Takeuchi:
Density of solutions to stochastic differential equations driven by gamma processes, 科研費シンポジウム「確率解析とその周辺」, 2011年11月12日, 佐賀大学 (佐賀県・佐賀市) .
- ⑰ A. Takeuchi:
Greeks formula for asset price model with some Lévy processes, 統計数理研究所共同研究集会「無限分解可能過程と関連する諸問題」, 2011年11月10日, 統計数理研究所 (東京都・立川市) .
- ⑱ A. Takeuchi:
Density of solutions to stochastic differential equations driven by gamma processes, 5th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, 2011年9月5日, Bonn (Germany).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹内 敦司 (TAKEUCHI, Atsushi)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：30336755