

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 27 日現在

機関番号：17401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740087

研究課題名(和文)点素な星グラフの存在に関する研究

研究課題名(英文)A STUDY ON THE EXISTENCE OF VERTEX-DISJOINT STARS IN GRAPHS

研究代表者

千葉 周也(CHIBA, SHUYA)

熊本大学・自然科学研究科・講師

研究者番号：80579764

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円、(間接経費) 570,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、グラフ理論における点素な部分グラフが存在するための十分条件について考察し、点素な星グラフの存在性を保証するためのErdos型条件を与えた。さらに、星グラフと他のグラフとの関係性を考察することで、当該分野において有用な結果を多数得る事ができた。その結果、当該分野の研究において、星グラフ等のグラフに有効的に働く可能性がある証明法の糸口を見出だすことができた。

研究成果の概要(英文)：In this research, I focused on the problem concerning the sufficient condition for the existence of vertex-disjoint subgraphs in graphs, and I worked on this problem by giving Erdos type condition for the existence of vertex-disjoint stars. Moreover, by studying the relationship between stars and other graphs, I could obtain many results concerning this problem. These results can be useful tools for the existence of vertex-disjoint stars and so on.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：グラフ理論 点素な部分グラフ 因子 星グラフ 閉路 道 Erdos型条件 次数条件

1. 研究開始当初の背景

H をグラフとしたとき、グラフ G が k 個の点素な H を含むとは、G の中に、H と同型な (同じ) グラフが互いに交わらないように (頂点を共有しないように) k 個存在する (G の部分構造として存在する) ことをいう。

グラフ理論において、古典的かつ重要な研究課題の一つとして、グラフ H と正整数 k を固定したとき、グラフ G が k 個の点素な H を含むための十分条件は何であろうか、という問題が挙げられる。この問題に関して、1963 年に、Corradi らは点素な閉路が存在するための最小次数条件を与えた。また、1970 年に、Hajnal らによって、位数 t の完全グラフが点素に存在するための最小次数条件が与えられている。これらの結果を出発点として、現在までに様々な種類のグラフ H について考察がなされており、その存在性を保証するための最小次数条件や辺数条件などが与えられてきた。実際に、それらの結果は評価の高い学術雑誌に掲載されるなど、これまでのグラフ理論に大きく貢献している。また、この問題に関する結果は、車両・船舶倉庫へのコンテナ積み込み、VLSI 設計、機械部品や服飾の型の配置などに応用されており、この研究がグラフ理論のみならず多方面において重要な位置にあることが知られている。

上記問題において、「閉路」や「道」と呼ばれるグラフは、現在までに研究対象として数多く取り上げられてきた。その理由は、それらグラフの構造が情報ネットワーク等に直接関係するからである。また、閉路や道は構造が対称的なため、「扱いやすいグラフ」というのも理由の一つである。実際、上記で述べた Corradi らの結果は、次数と条件等の形に拡張されており、より良い次数条件を得るための考察が現在もなされている。また、指定した頂点や辺を通るような k 個の点素な閉路の存在性に対する十分条件についてもその研究がなされるなど、多方面において拡張されている。

一方、閉路や道と (次数の観点において) 対極な位置にあるグラフとして、「星グラフ」と呼ばれるグラフが知られている。星グラフとは、1 頂点を除いて全ての頂点の次数が 1 であるような木のことである。特に、次数 1 の頂点が t 個の位数 t+1 の星グラフを t-星グラフという。星グラフはそのグラフの特徴から、上記応用のみならず、NP 困難問題のうちの一つである支配集合問題へのアプローチとしての応用面も持ち合わせている。さらに、情報理論や数理化学の中でも研究対象として取り上げられているように、多分野において現れるグラフであるが、そのぶん未解決問題も多く、特に、上記の点素な部分グラフに関する研究はある意味で滞っている状態が続いている。

私は現在までに、閉路・道・星グラフが点素に存在するための次数条件について研究を行ってきた。特に、2001 年に、Ota によって提起された点素な t-星グラフが存在するための最小次数条件に関する予想の解決に向けて精力的に研究を行ってきた。しかしながら、既存の結果を改良することには成功したが、Ota 予想の解決までには至らなかった。t-星グラフの最大次数と最小次数の差の大きさがその原因の一つであると考えており、現在の証明法では、その差をうまくコントロールできなかったため、予想値とのギャップが生じたのであろうと考察した。そのため、t-星グラフの存在性に対して、どのような条件が“良い”条件であり、どのような条件が“悪い”条件なのかをあらためて調べる必要があると考え、「点素な星グラフ」を本研究の主要課題として選定した。特に、星グラフの場合における新しい十分条件を提案することにより、星グラフに関する研究を活性化させる狙いで本研究を立ち上げた。

2. 研究の目的

本研究の目的は先に述べたように、点素な星グラフが存在するための十分条件について考察することによって、グラフ理論の発展に貢献することである。特に、星グラフに対する“良い”条件を見つけることで、他分野への応用に繋げやすい結果を得ることが最大の目的である。そのために、古典的かつ応用性の高い条件の一つである Erdos 型条件に注目し、その条件に関して結果を出すことを第一の目標として設定した。より具体的には、以下の問題を提起し、その解決を試みた。

研究課題

『t, k を 2 以上の整数とし、d を 1 以上かつ $k(t+1)/2$ 以下の整数とする。このとき、以下の関数 $f(t,k,d)$ を決定せよ: $f(t,k,d) = \min\{m \mid \text{位数 } k(t+1), \text{ 最小次数 } d \text{ 以上, 辺数 } m \text{ 以上のグラフは } k \text{ 個の点素な } t\text{-星グラフを含む}\}$ 』

上記課題の完全解決は一般的には難しいと思われるので、まずは、t が十分に大きい場合に限定して考え、そこから一般的な解決法を模索することにした。また、その証明法から他の条件へと繋げることで、別の応用性の高い定理を得ることも研究目的の一つとした。さらに、星グラフ以外のグラフについても考察し、統一的な証明法を模索することで、他のグラフとの関係性を明らかにすることも研究目的とした。

3. 研究の方法

本研究期間である 3 年間の間に試みた研究法は大きく分けて以下の二つである。

(1) 点素な t -星グラフが存在するための Erdos 型条件の考察

先に述べた研究課題の t が十分に大きい場合について考察し、その解決を試みた。特に、以前の研究成果から t が十分に大きく、かつ、 k が $d + 1$ 以上の場合において、 $f(t, k, d)$ の値を概ね決定できていたので、まずはその論文の完成と、その証明を精査することで、 k が d 以下の場合を考察し、 t が十分に大きい場合の $f(t, k, d)$ の値を完全に決定することを目指した。さらに、これらの研究成果を詳しく解析することで、一般の場合への拡張を試みた。

(2) 星グラフと他のグラフとの間の関係性について

星グラフのようにある意味で扱いが難しいグラフの存在性に対する十分条件について考察することで、そのようなグラフ全般に有効的な証明法の模索を試みた。特に、指定した頂点を通る閉路・道、長さの指定された閉路・道 及び θ グラフ等を中心に多角的視点からの考察を試みた。

また、上記 (1)、(2) の研究を順調に進めるために、国内外のセミナー・研究会等に積極的に参加し、他研究者との情報交換・打ち合わせを行う機会を大事にすることで、本研究課題の解決を目指した。

4. 研究成果

点素な部分グラフなどの特定の部分構造を保証するための十分条件について考察を行うことで、本研究期間内に有用な結果を多数得ることができた。より具体的な成果の値としては、7 編の論文が権威ある学術雑誌に掲載された。

以下では、先の「研究方法」で述べた(1)、(2) の二つの方法のそれぞれにおいて得られた研究成果について報告する。

(1) 「研究方法(1)」における研究成果について

以前の研究成果をもとに、十分に大きい t に対して、 $f(t, k, d)$ の値を以下のように決定することができた：

$$『f(t, k, d) = \min\{ {}_n C_2 - (d+1)n + dt + (d^2 + 3d + 4)/2, {}_n C_2 - kn + k^2 + k + 1 \} 』$$

これらの値は k が $d + 1$ 以上の場合と、 k が d 以下の場合の考察から生じた値である。それぞれの値は異なるが、どちらも同様の証明法から導かれることも分かった。また、上記結果は、 t が十分に大きい場合の結論であるが、その証明法を詳しく解析することによって、グラフの最小次数を考慮しないのであれば、 t の大きさに関わらず以下が成立する

ことも分かった：

『 t, k を 2 以上の整数とし、 $n = k(t+1)$ とする。このとき、位数 n 、辺数 ${}_{n-1}C_2 + 1$ 以上のグラフは、 k 個の点素な t -星グラフを含む』

これらの研究成果をまとめあげた論文を本研究期間内に学術雑誌に投稿することができたので、第一の目標は十分に達成できたと考えられる。一方、 t が小さい場合に対しては、同様の証明法をそのまま利用することができなかつたので、個々に調べることによってその考察を行ったが、小さい場合を全て同時に解決することは一般的には難しいという結論に至った。つまり、Erdos 型条件は、十分に大きい星グラフに対して、“良い”条件であるというのがこの研究法を通して得られた結論である。(尚、本研究は東京理科大学の江川教授、横浜市立大学の藤田准教授との共同研究によって得られた研究成果である。)

(2) 「研究方法(2)」における研究成果について

星グラフが“扱いづらいグラフ”の原因の一つとして、「最大次数と最小次数の差の大きさ」を先に挙げたが、その他にも、星グラフが「細分操作(辺に 1 頂点追加する操作)に関して“閉じていない”グラフ」ということも挙げられる。実際、あるグラフ H が細分操作に関して“閉じている”のであればその条件だけで、 k 個の点素な H を含むための(最良に近い)次数条件を得ることができる(Alon-Yuster 1996)。しかしながら、そうでない場合についてはこのような事実は知られていない。従って、この部分を考察することが、当該分野の研究を進展させるための重要なファクターになり得るので、本研究では、細分操作に関して“閉じていない”グラフの一つである「偶閉路(偶数位数の閉路)」に注目し、以下の定理を証明した：

『位数が十分に大きいグラフは、最小次数が $2k + 1$ 以上であれば、 k 個の点素な偶閉路を含む』

特に、この定理の証明法は偶閉路のみならず、他の細分操作に関して閉じていないグラフに対しても有効的に働く可能性があることが分かった。その手法とは、「細分操作に関して“閉じている”グラフの部分構造を考える」というものである。偶閉路の存在性を直接証明するのではなく、偶閉路を常に含むような細分操作に関して“閉じている”グラフを考えることで、“扱いやすいグラフ”に帰着させたのである。上記定理の証明において実際に利用したグラフは「 θ グラフ」と呼ばれるグラフであり、このグラフに関して以下を証明した：

『位数が十分に大きいグラフは、最小次数が $2k+1$ 以上であれば、 k 個の点素な θ グラフを含む』

θ グラフは3つの内素な道の和なので、その部分構造として偶閉路を含むことが容易に分かる。従って、この定理から上記の偶閉路に関する定理を系として得ることができる。この研究成果は、グラフ H が細分操作に関して“閉じていない”のであれば、 H を含むような細分操作に関して“閉じている”グラフを見つけることが、十分条件を得るための近道になり得ることを意味している。今後の研究にも繋がる十分に価値あるものと言える。(尚、本研究は国立情報学研究所の河原林教授、山形大学の佐久間准教授、横浜市立大学の藤田准教授との共同研究によって得られた研究成果である。)

「点素な閉路」は、上記のように星グラフとの関係性だけでなく、『4-連結クローフリーグラフはハミルトン閉路をもつ』というグラフ理論における有名な Matthews-Sumner 予想との関係性もあるので、本研究期間内において、その観点からの考察も行った。特に、2-連結クローフリーグラフと4-連結クローフリーグラフとの間の差を示す結果の一つとして、『位数 n 、最小次数 d の2-連結クローフリーグラフは、高々 n/d 個の点素な閉路によって分割できる』ということを実証することに成功した。さらに、長い閉路を含むような点素な閉路への分割等についても結果を出し、評価の高い学術雑誌に掲載された。(尚、本研究は、西ポヘミア大学の Cada 准教授、日本大学の善本准教授との共同研究によって得られた研究成果である。)

また、指定した頂点を通る点素な閉路・道及び指定した長さの点素な道の存在性を保証するための十分条件についても考察し、新しい形の十分条件を得ることに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

S. Chiba, S. Fujita, K. Kawarabayashi, T. Sakuma, Minimum degree conditions for vertex-disjoint even cycles in large graphs, *Advances in Applied Mathematics* 54 (2014), 105-120. (査読有)

S. Chiba, M. Tsugaki, A degree sum condition for the existence of a path-factor, *Ars Combinatoria* 113 (2014), 441-450. (査読有)

R. Cada, S. Chiba, Circumferences of 2-factors in claw-free graphs, *Discrete Mathematics* 313 (2013), 1934-1943. (査読有)

S. Chiba, S. Fujita, Covering vertices by a specified number of disjoint cycles, edges and isolated vertices, *Discrete Mathematics* 313 (2013), 269-277. (査読有)

R. Cada, S. Chiba, K. Yoshimoto, 2-factors in claw-free graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 38 (2011), 213-219. (査読有)

[学会発表](計14件)

S. Chiba, On the number of components of 2-factors in claw-free graphs, Hakata Workshop 2014 - Discrete Mathematics and its Applications, 2014年2月8日, Fukuoka City, Japan. S. Chiba, R. Cada, K. Yoshimoto, Some recent results on 2-factors in claw-free graphs, 37th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2013年12月13日, University of Western Australia, Australia.

S. Chiba, Sets of cycles whose union dominates all edges, 7th Workshop on the Matthews-Sumner Conjecture and Related Problems, 2013年3月27日, Domazlice, Czech Republic.

千葉 周也, R. Cada, 小関 健太, P. Vrana, 善本 潔, Tutte cycles and Hamiltonicity of 4-connected claw-free graphs, 日本数学会 2012年度秋季総合分科会, 2012年9月18日, 九州大学.

S. Chiba, R. Cada, K. Ozeki, P. Vrana, K. Yoshimoto, Hamilton cycles and Tutte cycles in claw-free graphs, Workshop Cycles and Colourings 2012, 2012年9月13日, High Tatras, Slovakia

S. Chiba, R. Cada, K. Ozeki, P. Vrana, K. Yoshimoto, Equivalence of Jackson's and Thomassen's conjecture, International Conference on Cycles in Graphs, 2012年5月30日, Vanderbilt University, USA.

千葉 周也, Longest cycles of 2-factors in claw-free graphs, 応用数学合同研究集会, 2012年12月15日, 龍谷大学.

千葉 周也, R. Cada, 善本 潔, クローフリーグラフにおける2-因子の内周について, 日本数学会 2011年度秋季総合分科会, 2011年9月29日, 信州大学. S. Chiba, Circumferences of 2-factors in claw-free graphs, Workshop Cycles and Colourings 2011, 2011年9月5日, High Tatras, Slovakia.

S. Chiba, 2-factors in claw-free graphs, European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications 2011, 2011年8月30日, Renyi Institute, Hungary.

〔図書〕(計1件)

Y. Mizoguchi, H. Waki, T. Shibuta, T. Taniguchi, O. Shimabukuro, M. Tagami, H. Kurihara, S. Chiba, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, Hakata Workshop 2014 - Discrete Mathematics and its Applications (MI Lecture Note. volume 56), 2014年3月28日, 141.

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

千葉 周也 (CHIBA SHUYA)
熊本大学・自然科学研究科・講師
研究者番号：80579764

(2) 研究分担者

(該当なし)

研究者番号：

(3) 連携研究者

(該当なし)

研究者番号：