

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 17 日現在

機関番号：32689

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740090

研究課題名(和文) 高品質特性曲線有限要素法の構築

研究課題名(英文) Construction of a high quality characteristics finite element method

研究代表者

野津 裕史 (Notsu, Hirofumi)

早稲田大学・高等研究所・講師

研究者番号：00588783

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円、(間接経費) 870,000円

研究成果の概要(和文)：近年我々はNavier-Stokes方程式のための安定化特性曲線有限要素スキームを開発した。それは特性曲線法と圧力安定化法を組み合わせたスキームである。得られる連立一次方程式の係数行列は対称であり、安価なP1/P1要素が用いられている。よって特に3次元問題において有用である。

同スキームの安定性と収束性を証明した。その誤差評価は最良である。その結果、開発したスキームは、数値的に有用であることに加えて、数学的信頼性ももつことが示された。その他にも本研究期間において特性曲線法に関連するいくつかの数値的・理論的結果を得た。

研究成果の概要(英文)：Recently we have developed a stabilized characteristics finite element scheme for the Navier-Stokes equations. It is a combined scheme with the characteristics method and a pressure-stabilization method. The matrix of the derived system of linear equations is symmetric and a cheap P1/P1 element is employed. The scheme is, therefore, efficient especially three-dimensional problems.

Stability and convergence of the scheme have been proved. The error estimates are optimal. Consequently, the scheme has mathematical reliability in addition to the computational advantages.

Some other numerical and theoretical results related to the characteristics method have been obtained in this research period.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：流れ問題 有限要素法 特性曲線法 安定性 収束性

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 流れ問題の数値解法は数多く開発されているが、今なお数学的信頼性と工学的有用性を兼ね備えた高品質な解法開発が待たれている。申請者は、連立一次方程式の係数行列が対称である、という長所を持つ特性曲線有限要素法に着目した。近年申請者らは特性曲線有限要素法と圧力安定化法を組み合わせた安定化特性曲線有限要素スキームを開発した。よく知られた下限上限条件の制約を取り除き、3次元問題において有用な P1/P1 要素を用いたスキームで、3次元問題での特性曲線有限要素法の利用・普及への道を開いた。同スキームに数学的信頼性が加わり、将来有力な流体数値解法になることが期待される。

### 2. 研究の目的

近年、申請者らは Navier-Stokes 方程式のための圧力安定化特性曲線有限要素スキームを開発した。そのスキームを基に本研究では、数学的・数値的研究を推進し、高品質特性曲線有限要素法を構築することを目的とする。開発したスキームは物理的に自然な特性曲線法と、強力な汎用数値解法である有限要素法を組み合わせた手法で、特に3次元大規模数値計算に有用であるが、スキームの安定性・収束性の理論解析については未解決である。この点を解決してスキームに数学的信頼性を与え、数値面だけでなく数学面からも高品質な数値解法を構築する。

### 3. 研究の方法

スキームを開発した際、人工的に設定した滑らかな厳密解に対して、数値解の厳密解への数値的な収束精度を確認している。Navier-Stokes 方程式の解析において自然に現れるノルムを用いて、厳密解への収束精度が  $O(dt+h)$  であった ( $dt$ : 時間刻み幅,  $h$ : 空間刻み幅)。実際、申請者はこの最良精度が数学解析によって得られると期待している。証明は、安定化が施されていない伝統的な特性曲線有限要素スキームに対する収束証明の論文 [Süli, 1988, Numerische Mathematik] の方法を参考に時間ステップごとに評価を行う。鍵となるのは、非線形性に起因する、流速の1階微分の最大値の評価である。これまでの状況と比較して、安定化項が加わることおよび流速を近似度の低い P1 要素で近似することが原因で困難な状況がおり、その影響が  $dt$  の制限となって現れる可能性がある。数値計算を実行する立場から、この制限はできる限り緩くしたい。これらを精密に評価して収束証明をすすめる。

### 4. 研究成果

(1) Oseen 方程式のための安定化特性曲線有限要素スキームを開発し、その安定性および誤差評価を与えた。Oseen 方程式は線形化 Navier-Stokes 方程式であり、Navier-Stokes

方程式から非線形性を取り除いた方程式である。数値計算スキームの評価に現れる正定数を精査して、Reynolds 数への依存性を明らかにした。すなわち、流速の  $L_2$  ノルムの値は、Reynolds 数に無関係に安定である。これにより開発したスキームが有用であることが理論的に示された。また、誤差解析を行い、数値解の厳密解への収束性とそのオーダーを示した。すなわち、計算メッシュサイズ  $h$  と時間刻み幅  $dt$  を細かくすると、数値解は必ず厳密解に  $O(dt+h)$  で近づくことを示した。

(2) Navier-Stokes 方程式のための安定化特性曲線有限要素法の安定性と収束性を証明し、同スキームの数学的信頼性を確立した。(1) で得た、Oseen 方程式の安定化特性曲線有限要素スキームについての結果を受け、Navier-Stokes 方程式のための安定化特性曲線有限要素スキームの数学解析を行った。以下の結果を得た。(i) スキームは条件: (\*)  $dt \leq ch^{d/4}$  ( $c$ : 定数,  $d$ : 空間次元) の下で安定である。(ii)  $dt$  と  $h$  を上記条件を保ったまま小さくするとき、スキームの解(数値解)は Navier-Stokes 方程式の解に収束して、その収束のはやさは流速について  $H_1$  ノルムと圧力について  $L_2$  ノルムにおいて  $O(dt+h)$  である。(i)の結果により、数値計算は安定に実行されることが保証され、(ii)の結果により、数値解が厳密解に必ず収束することが保証された。収束オーダーは最良である。条件(\*)は Navier-Stokes 方程式の非線形性から現れるが、これは伝統的なスキームで得られた条件と同じで、開発したスキームは安定性条件を悪化させていない。

本結果により研究の目的を達成した。そして、我々が開発したスキームが数値的に有用であるだけでなく、数学的信頼性をあわせもった数値解法であることが示された。

(3) 時間2次精度の特性曲線有限差分スキームを提案し、離散  $L_2$  理論を構築した。特性曲線有限要素法で現れる合成関数が各三角形要素上において滑らかではないため、その積分を計算機上で厳密に再現することは困難である。これにより実計算での数値積分に注意が必要であることが報告されている。開発したスキームは有限差分法を用いるため、積分は不要で、理論と実計算が完全に一致する。特性曲線スキームの利点である、連立一次方程式の係数行列の対称性、を維持しているため、その求解は高速である。時間2次精度を実現する際、通常 Crank-Nicolson 法を時空間移動する特性曲線に沿ったものに拡張した。解析には離散的な  $L_2$  理論を用いており、最大値原理が成立しない問題を意識している。同理論を展開してスキームの安定性・収束性を示して、数学的に正当化した。

(4) 開発した安定化特性曲線有限要素スキームを基礎として、自然対流問題の計算スキ

ームを開発した。スキームは流速・圧力・温度の全てに四面体1次要素を利用したスキームであり、特に3次元問題に有用である。自然対流問題に現れる2つの物質微分項に特性曲線法を適用した。スキームは対称で計算負荷は半減する。実際に2, 3次元問題の数値計算を行い、有用性を確認した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

1. 野津裕史, 田端正久, Oseen 方程式と Navier-Stokes 方程式のための安定化特性曲線有限要素スキーム, 京都大学数理解析研究所講究録(印刷中), 査読無
2. H. Notsu, M. Tabata, An application of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme to the linear stability analysis of flows past a circular cylinder, Kyoto University RIMS Kokyuroku, 査読無, Vol.1875, 2013, pp.109-116
3. H. Notsu, H. Rui, M. Tabata, Development and L2-analysis of a characteristics finite difference scheme of second order in time for convection-diffusion problems. Journal of Algorithms & Computational Technology, 査読有, Vol.7, No.3, 2013, pp.343-380 DOI: 10.1260/1748-3018.7.3.343
4. M. Ogino, A. Takei, H. Notsu, S. Sugimoto, S. Yoshimura, Finite element analysis of high frequency electromagnetic fields using a domain decomposition method based on the COCR method, Theoretical and Applied Mechanics Japan, 査読有, Vol.61, 2013, pp.173-181 DOI: 10.11345/nctam.61.173
5. H. Notsu, D. Ueyama and M. Yamaguchi. A self-organized mesh generator using pattern formation in a reaction-diffusion system, Applied Mathematics Letters, 査読有, Vol.26, 2013, pp.201-206 DOI: 10.1016/j.aml.2012.08.012.
6. 田端正久, 野津裕史, 非格子点関数値を要する有限差分近似, 日本応用数理解析学会論文誌, 査読有, Vol.22, No.3, 2012, pp.171-179 [http://ci.nii.ac.jp/els/110009518458.pdf?id=ART0009976427&type=pdf&lang=en&host=cinii&order\\_no=&ppv\\_type=0&lang\\_sw=&no=1402852366&cp=](http://ci.nii.ac.jp/els/110009518458.pdf?id=ART0009976427&type=pdf&lang=en&host=cinii&order_no=&ppv_type=0&lang_sw=&no=1402852366&cp=)
7. M. Kimura, H. Notsu, A mathematical model of fracture phenomena on a spring-block system, Kyoto University RIMS Kokyuroku, 査読無, Vol.1848, 2013, pp.171-186
8. 野津裕史, 田端正久, 特性曲線有限差分法の離散 L2 理論, 京都大学数理解析

研究所講究録, 査読無, Vol.1791, 2012, pp.151-157

9. H. Notsu, Analysis of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for linearized Navier-Stokes equations, Kyoto University RIMS Kokyuroku, 査読無, Vol.1782, 2012, pp.51-61
10. 野津裕史, 特性曲線法による流れ問題の数値計算とその解析, 第3回 若手による流体セミナー 講義録, 査読無, 2012, pp.57-74

[学会発表](計45件)

1. H. Notsu, Development of a stabilized characteristics finite element scheme for the Navier-Stokes equations in a time-dependent domain, Advances in Computational Fluid-Structure Interaction and Flow Simulation (AFSI 2014), March 19, 2014, Waseda University, Tokyo, Japan (invited)
2. 野津裕史, ながれのシミュレーションと数学, 早稲田大学高等研究所 Top Runners' Lecture Collection of Science 第10回「流体と幾何学」, 2014年3月10日, 早稲田大学, 東京(招待)
3. H. Notsu, A stabilized characteristics finite element scheme for the Navier-Stokes equations -theory and computations, IRTG 1529 seminar, February 4, 2014. Technical University Darmstadt, Darmstadt, Germany (invited)
4. H. Notsu, P1/P1-stabilized characteristics finite element schemes for flow problems, Winter Seminar and Klausurtagung "Fluids and Snow", January 27, 2014, Chalet Giersch, La Clusaz, France (invited)
5. 野津裕史, 田端正久, Navier-Stokes 方程式のための安定化特性曲線有限要素スキームの理論とその3次元計算, 第27回数値流体力学シンポジウム, 2013年12月19日, 名古屋大学, 名古屋
6. H. Notsu, Development of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for flow problems with moving domains, 5th Asia Pacific Congress on Computational Mechanics & 4th International Symposium on Computational Mechanics (APCOM2013), December 11, 2013. InterContinental Hotel, Singapore
7. 野津裕史, 3次元流れ問題のための特性曲線有限要素スキームの理論と実践, SMART セミナー, 2013年11月15日, 東北大学, 仙台(招待)
8. 野津裕史, 安定化特性曲線有限要素スキームの数値解析と流れの線形安定性解析への応用, 早稲田大学流体数学セミナー, 2013年10月18日, 早稲田大学, 東京(招待)
9. 野津裕史, 田端正久, 圧力安定化特性曲

- 線有限要素スキームの解析とシミュレーション, RIMS 研究集会「応用数理と計算科学における理論と応用の融合」, 2013年10月17日, 京都大学, 京都(招待)
10. H. Notsu, M. Tabata, Error estimates of pressure-stabilized characteristics finite element schemes for flow problems, CoMFoS13 (Continuum Mechanics Focusing on Singularities 2013), Oct. 12, 2013. Kanazawa University, Kanazawa (invited)
  11. 野津裕史, 田端正久, Navier-Stokes 方程式のための圧力安定化特性曲線有限要素スキームの誤差評価と数値計算, 日本数学会 2013年度秋期総合分科会, 2013年9月27日, 愛媛大学, 松山
  12. 野津裕史, 田端正久, Navier-Stokes 方程式のための圧力安定化特性曲線有限要素スキームの誤差評価, 日本応用数理学会 2013年度年会, 2013年9月11日, アクロス福岡, 福岡
  13. 野津裕史, 圧力安定化特性曲線有限要素スキームの誤差評価 -時間刻み幅に対する条件-, ワークショップ: 有限体積法の数学的基盤理論の確立 III, 2013年8月2日, 愛媛大学, 松山(招待)
  14. 野津裕史, 田端正久, 特性曲線有限差分法の離散 L2 理論と数値計算, 第18回計算工学講演会, 2013年6月21日, 東京大学生産技術研究所, 東京
  15. 野津裕史, 田端正久, Oseen 方程式のための圧力安定化特性曲線有限要素スキームの安定性と収束性, 第18回計算工学講演会, 2013年6月19日, 東京大学生産技術研究所, 東京
  16. 野津裕史, 特性曲線法に基づく流体数値計算スキーム, ロバスト幾何計算連続講演会 2013年度第1回講演会, 2013年5月8日, 明治大学先端数理科学研究科, 東京(招待)
  17. 野津裕史, 流れ問題のための圧力安定化特性曲線有限要素スキーム, 東京大学数値解析セミナー, 2013年4月23日, 東京大学大学院数理科学研究科, 東京(招待)
  18. H. Notsu, H. Rui and M. Tabata, Discrete L2 analysis of characteristics finite difference schemes of second order in time for convection-diffusion problems, Advances in Computational Mechanics, Feb. 26, 2013, San Diego, California, USA (invited)
  19. H. Notsu, Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for the Oseen equations, RIMS Workshop: Mathematical Analysis of Incompressible Flow, Feb. 6, 2013. RIMS, Kyoto University, Kyoto (invited)
  20. 野津裕史, 流れ問題のための特性曲線有限要素および有限差分スキーム, 芝浦工業大学数理談話会, 2013年1月21日, 芝浦工業大学, さいたま(招待)
  21. 野津裕史, H. Rui, 田端正久, 特性曲線差分スキームと離散 L2 理論, 第26回数値流体力学シンポジウム, 2012年12月19日. 国立オリンピック記念青少年総合センター, 東京
  22. 野津裕史, 田端正久, Oseen 方程式のための圧力安定化特性曲線有限要素スキームの誤差評価, 日本数学会 2012年度秋期総合分科会, 2012年9月21日, 九州大学, 福岡
  23. H. Notsu, Characteristics finite element and difference schemes for flow problems, Workshop on Modeling, optimization and simulation of complex fluid flow, June 21, 2012, Technical University Darmstadt, Darmstadt, Germany (invited)
  24. H. Notsu, Analysis of characteristics finite difference schemes for convection-diffusion problems, The 5th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, June 11, 2012, Waseda University, Tokyo, Japan (invited)
  25. 野津裕史, 田端正久, 格子点関数の非格子点での差分近似, 日本数学会 2012年度年会, 2012年3月29日, 東京理科大学, 東京
  26. H. Notsu, A development of a self-replicating mesh generator. CREST Workshop: Recent Developments of Mesh Generation and Biofluids, March 19, 2012, The University of Tokyo, Tokyo, Japan (invited)
  27. 野津裕史, 特性曲線有限差分法の離散 L2 理論-非格子点での差分近似-, 非線形現象の数値シミュレーションと解析 2012, 2012年3月8日, 北海道大学, 札幌(招待)
  28. H. Notsu, Pressure-stabilized characteristics finite element schemes for flow problems and their two and three dimensional computations, ESF-JSPS Frontier Science Conference Series for Young Researchers, Mathematics for Innovation: Large and Complex Systems, March 1, 2012. The Four Seasons Hotel Tokyo at Chinzan-so, Tokyo, Japan
  29. H. Notsu. Numerical computations by schemes based on the method of characteristics. Mini-Workshop on Fluid Dynamics, January 31, 2012. Technical University Darmstadt, Darmstadt, Germany (invited)
  30. 野津裕史. 特性曲線法に基づくスキームによる流体計算, 愛媛大学談話会, 2012年1月18日, 愛媛大学, 愛媛(招待)
  31. H. Notsu, H. Rui, M. Tabata, A discrete L2 analysis of a characteristics finite difference scheme of second order in time for convection-diffusion problems,

- International Conference on Numerical Analysis and Optimization -Theory and Applications, December 19, 2011, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Kingdom of Saudi Arabia
32. 野津裕史, 特性曲線有限差分法の離散 L2 理論-時空間曲線に沿ったクランク・ニコルソン法-, 富山大学談話会, 2011 年 12 月 8 日, 富山大学, 富山(招待)
  33. H. Notsu and M. Tabata, A pressure-stabilized characteristics finite element scheme for the Navier-Stokes equations and its application to a thermal convection problem, SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, November 14, 2011, San Diego Marriott Mission Valley, San Diego, California, USA
  34. 野津裕史, 田端正久, 特性曲線有限差分法の離散 L2 理論, RIMS 研究集会, 2011 年 10 月 27 日, 京都大学, 京都(招待)
  35. H. Notsu and M. Kimura. A spring-block system based on the P1-finite element method and an application to crack propagation modeling, CoMFoS11 (Continuum Mechanics Focusing on Singularity 2011), October 9, 2011, Hiroshima Kokusai Gakuin University, Hiroshima (invited)
  36. 野津裕史. 特性曲線法に基づく数値計算スキームとその実践・応用, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 2011 年 10 月 1 日, 信州大学, 松本(特別講演)
  37. 野津裕史, 田端正久, 離散 L2 評価と特性曲線法, 日本応用数理学会 2011 年度年会, 2011 年 9 月 16 日, 同志社大学, 京都
  38. 野津裕史, 特性曲線法による流れ問題の数値計算とその解析, 若手による流体セミナー, 2011 年 9 月 4 日, 富山大学, 富山(招待)
  39. 野津裕史, 特性曲線差分法の離散 L2 解析, ワークショップ有限体積法の数学的基盤理論の確立 i, 2011 年 8 月 5 日, 富山大学, 富山(招待)
  40. 野津裕史, 特性曲線法に基づく数値計算スキームと数値解析, 早稲田大学高等研究所 月例研究会, 2011 年 7 月 8 日, 早稲田大学, 東京
  41. H. Notsu, Numerical schemes for flow problems based on the method of characteristics, Kyoto University RIMS Workshop, July 7, 2011, Kyoto University, Kyoto (invited)
  42. 野津裕史, 特性曲線法の L2 評価-有限要素および差分スキーム-, 京都大学 GCOE tea time seminar, 2011 年 7 月 5 日, 京都大学, 京都(招待)
  43. H. Notsu, M. Yamaguchi and D. Ueyama, A mesh generator using a self-replicating

system, The 7th East Asia SIAM Conference, June 29, 2011. Waseda University, Kitakyushu

44. 野津裕史, 田端正久, Navier-Stokes 方程式のための時間 2 次精度圧力安定化特性曲線有限要素スキーム, 計算工学会, 2011 年 5 月 27 日, 東京大学, 柏
45. 野津裕史, 田端正久, 圧力安定化特性曲線有限要素スキームによる熱対流問題の数値シミュレーション, 計算工学会, 2011 年 5 月 25 日, 東京大学, 柏

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0 件)  
取得状況 (計 0 件)

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://scheme.hn/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

野津 裕史 (NOTSU, Hirofumi)  
早稲田大学・高等研究所・講師  
研究者番号: 00588783