様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号：３２６４４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４００９１
研究課題名（和文）超離散可積分系の構築

研究課題名（英文）Construction of ultradiscrete integrable system

研究代表者
長井　秀友（Nagai, Hidetomo）

東海大学・理学部・講師

研究者番号：００５７２１４０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では超離散可積分系，特に超離散ソリトン系と呼ばれる和，差およびmax演算で構成される発展方程式を焦点にし，これらの厳密解の構造の研究を行った．超離散ソリトン系では微分，差分ソリトン系との対応がいくつか以前から知られていたが現在に至るまで解構造を表す統一的な理論については不明であった．本研究成果では超離散ソリトン解を拡張した超離散PPS解が満たす超離散PPS方程式とその離散対応物，2種の超離散ソリトン解を混合した解を持つ新しい超離散ソリトン方程式等を導いた．これらは先行研究では知られていなかったものであり，超離散可積分系の理論を構築する上でカギとなると予想される．

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is construction of ultradiscrete integrable system. Ultradiscrete equations consist of addition, subtraction and max operation. In particular, I focused on ultradiscrete soliton system. This system is derived from discrete soliton system by a limiting procedure called ultradiscretization. In this research, I gave a new ultradiscrete equation called ultradiscrete Periodic Phase soliton equation and its discrete analogue. These equations have extended soliton solutions called ultradsicrete or discrete Periodic Phase Soliton solution respectively. An ultradiscrete soliton equation which has two different ultradiscrete soliton solutions was also given. It is expected that these solutions may be clues for construction of ultradiscrete integrable system.

研究分野：離散可積分系

キーワード：離散可積分系　超離散系　ソリトン　箱玉系

１．研究開始当初の背景

可積分系と呼ばれる保存量，厳密解，対称性の存在を特徴とする非線形方程式は，大きく分けて微分・差分・超離散方程式に分類される．超離散方程式とは和，差および max 演算で表される方程式であり，独立変数，従属変数がともに離散値をとる．可積分方程式の場合，構造を保つように微分方程式を差分化することで可積分差分方程式が得られ，さらに超離散化と呼ばれる極限操作を行うことで可積分な超離散方程式が得られる．差分，超離散方程式の系をまとめて離散可積分系とよび，特にここでは区別のために超離散方程式系を超離散可積分系とよぶことにする．ソリトン方程式は代表的な可積分方程式であり，これまでにいくつかのソリトン方程式が超離散化され，超離散ソリトン方程式が与えられてきていた．　一方，超離散化は負の項を含む差分方程式には適用できないという，いわゆる負の問題と呼ばれる問題が存在していた．このため正値性が保たれる個々の式には超離散化が適用できるが，微分・差分系が持つ数理構造全体を超離散系に直接に対応させるすべは知られていなった．事実微分，差分ソリトン系では佐藤理論と呼ばれる，いわばソリトン方程式の統一理論が存在しているのに対し，超離散系に対応する構造は明らかになっていなかった．

研究代表者はそのもとで，本研究が開始される以前に微分・離散ソリトン方程式に存在する構造の超離散対応物を与えてきていた．具体的には行列式解に対応する超離散パーマネント解や超離散ベックルンド変換などを与えてきており，また超離散プリュッカー関係式とよばれる関係式を与え，この関係式を用いて超離散系で閉じたソリトン解の証明方法を与えた．

２．研究の目的

本研究の目的は超離散可積分系の構築である．研究背景で挙げたように超離散系においては微分・差分系に置けるような数理構造が与えられておらず，種々の方程式レベルでの対応にとどまっていた．本研究では微分・離散可積分系に存在する構造や理論の超離散対応物を与えることを目的とし,さらにmax-プラス代数と呼ばれる代数構造において，厳密解を持つような新たな発展方程式を与えることを目的とした．

３．研究の方法

当初の研究方法として，これまでの研究で与えてきた超離散パーマネント，超離散ソリトン解，超離散プリュッカー関係式などを手掛かりにして，当時までに得られている超離散方程式と離散対応を調べ上げることを明らかにし，微分(差分)作用素および Lax 形式の超離散対応物を構成することを計画していた．また 1 変数関数の場合の超離散可積分系についても研究対象にし，たとえば離散パンルヴェ方程式とその行列式解の超離散対物として超離散パンルヴェ方程式やその解を超離散パーマネントで表すこと，さらに超離散系の特殊関数を生成することを計画していた．

４．研究成果

研究成果は大きく分けて 4 つとなる．以下にこれらの成果を説明する．

（１）　周期位相項を持つソリトン方程式

本研究は早稲田大学広田良吾氏と神戸大学太田泰広氏との共同研究による．超離散 hungry Lotka-Volterra 方程式と呼ばれる方程式には超離散 PPS 解という解が存在することが先行研究によって明らかになっていた．この解は超離散ソリトン解を拡張した解となっている．先行研究で方程式は A 型と呼ばれるグループに分類されるソリトン方程式を超離散化して得られていた．一方で超離散 PPS 解は得られた超離散方程式をもとに発見されていた．そのため超離散 PPS 解の離散対応物については発見されていなかった．言い換えると離散ソリトン方程式には存在不明な解が超離散ソリトン方程式には存在するという状況であった．本研究によってこの問題が解決され，超離散 PPS 解の離散対応物は D 型と呼ばれるグループに属する離散ソリトン方程式に存在することが判明した．具体的に述べると，離散 DKP 方程式と呼ばれるソリトン方程式に適当なリダクションを行うことで周期位相項を持つソリトン解が存在することが示された．この方程式を離散 PPS 方程式と呼ぶ．この離散 PPS 方程式とその解を超離散化することで超離散 PPS 方程式および超離散 PPS 解が得られることを示した．この解に適当な条件を付加することによって先行研究で与えられていた解に特殊化され，また方程式自身も超離散 hungry Lotka-Volterra 方程式になることを示した．つまり本研究によって先行研究の解を含む広い範囲の方程式と解を与えることに成功した．特に本研究成果は離散ソリトン系では全く別の方程式が超離散化を経由することによって同じソリトン解を共有するという事実を与えている．

（２）　超離散 KP 方程式の解の拡張

本研究は早稲田大学大学院高橋大輔研究室

大学院生（当時）水木啓介氏との共同研究による．研究代表者は先行研究として超離散 KP 方程式の超離散パーマネント解を与えていた．これは連続，離散系の場合における行列式解の超離散対応物としてみられる．しかしながら先行研究で与えていた解は連続・離散系の場合は一般解を与えているのに対して，超離散系では特殊な場合のみの解に適用されている形式であり完全な対応とは言えなかった．本研究ではこれらの対応を目指し解の拡張を試みた．その結果一部の場合においてであるが，拡張に成功した．完全な対応には至らなかったが，本研究結果により新たな形式の超離散ソリトン解が得られた．

（３） 超離散 KdV 方程式の周期，非周期ソリトン解の対応

本研究は立教大学岩尾慎介氏（当時），青山学院大学礒島伸氏（当時）との共同研究による．離散系には周期ソリトン解から非周期ソリトン解を構成する方法として Krichever construction と呼ばれる手法が知られている．本研究ではこの構成方法の超離散対応物を与えた．具体的には周期箱玉系と呼ばれる超離散 KdV 方程式の周期解に対して極限操作を行うことで開放系の解を与えることに成功した．解自身はすでに先行研究として知られていたが，本研究によって解のみならず，解の構成方法自身も対応することを示した．

（４） B 型箱玉系の厳密解

本研究は早稲田大学広田良吾氏との共同研究による．研究成果（１）に挙げた例のように，離散ソリトン方程式を超離散化した場合，得られた方程式の解が別の方程式と共有する解になりうる，という例を与えた．本研究ではこの例をもとに新しいタイプの超離散ソリトン方程式を与えた．すなわち研究成果（１）の例をもとに，A 型，B 型，D 型いずれにも分類されない離散方程式を超離散化して得られた方程式を調べ，2 種の超離散ソリトン解が存在するような超離散ソリトン方程式を導いた．この方程式を B 型箱玉系とよぶ．この B 型箱玉系には超離散 KdV 方程式のソリトン解と超離散戸田タイプのソリトン解を持つことを示した．さらに本研究ではこの 2 種を混合した解も存在することを示した．これらの解の離散対応物は現在のところ調査中である．超離散系においてこのような複数の超離散ソリトン解を持つ例はほとんど知られておらず，特殊な方程式であると考えられる．

以上の研究成果をまとめる．当初の研究目的である超離散可積分の構築であるが，本研究では構築自体は未完成となったが，可積分系である超離散ソリトン系においていくつかの興味深い結果が得られた．当初の研究方法では差分演算子や Lax 形式などの超離散対応物を考える予定であった．一般的な構造を調べる際には KdV 方程式や戸田方程式等の代表的な方程式を基準にすることが必要である．本研究ではそのために指針となるいくつかの超離散方程式をはじめに調べた．その研究過程において共同研究者などを通じて超離散 PPS 解や B 型箱玉系といった例が与えられた．超離散可積分構造を構築する上で解の分類は必要不可欠であり，超離散 KdV 方程式や超離散戸田方程式を始めとする従来の超離散ソリトン方程式のほとんどが A 型であったのに対して，超離散 PPS 解や B 型箱玉系は A 型に含まれない．そのため，これらの解の離散対応物を明らかにし比較することで，超離散系での解構造の比較が可能になると考えたため，当初の研究計画を変更してこれらの方程式を中心に厳密解や解構造を調べることに焦点が移行していった．その結果離散系の対応が明らかになっていなかった超離散ソリトン方程式の解が与えられた．これら得られた成果のいくつかは期間中に間に合わず，現在論文作成中となってしまっているが，国際会議等ではすでに発表をしており，ある程度の肯定的なコメントを得られている．超離散 PPS 方程式や B 型箱玉系といった方程式は，いずれも従来知られていないものであり，かつ先験的な方程式であることからも今後の研究の上で指針となる方程式になると考えている．現時点においては超離散系の数理構造は未知の状態であるが，構築された際にはこれらが代表的な方程式となることが期待される．

今後の展望を述べる．本研究の目的であった超離散可積分系の構築が未完成であるため，引き続き研究を続ける必要がある．特に本研究によって離散ソリトン系の解を超離散化した場合でもこれらが元の解と同じものかがはっきりしない例が挙げられた．また，離散ソリトン系でも超離散化した場合に興味深い解が存在するという例も与えられた．そのため，従来の離散系の解から超離散化を行うという方法だけではなく，超離散系独自の解の導出方法や数理構造を構築する必要性があり，超離散ソリトン系での解の分類や，厳密解の導出方法の研究の着手が必要であると考えられる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5 件）

① 長井秀友，B 型箱玉系の混合解について，

RIAM 研究集会報告集, 査読有, 25AO-S2,2014, 65-70
http://hdl.handle.net/2324/1448856

② H.Nagai, New Type of Solutions for the Ultradiscrete Soliton Equations, The Fourth TKU-KMITL Joint Symposium on Mathematics and Applied Mathematics Proceedings, 査読無, Vol.1, 2014, 51-58

③ 広田良吾, 長井秀友, B 型箱玉系のソリトン解, RIAM 研究集会報告集, 査読有, 24AO-S3,2013, 101-106
http://hdl.handle.net/2324/27175

④ 広田良吾, 太田泰広, 長井秀友, Periodic phase soliton 方程式の N-ソリトン解, RIAM 研究集会報告集, 査読有, 21AO-S7,2012, 90-95
http://hdl.handle.net/2324/23459

⑤ S.Iwao, H.Nagai and S.Isojima, Tropical Krichever construction for the non-periodic box and ball system, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有, Vol.45, 2012 395202(14pp)
DOI:10.1088/1751-8113/45/39/395202

〔学会発表〕(計 6 件)

① H.Nagai, Soliton Solutions to an Extended Box and Ball System Equation, SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures, 13th, August, 2014, Cambridge(United Kingdom)

② H.Nagai, New Type of Solutions for the Ultradiscrete Soliton Equations, The Fourth TKU-KMITL Joint Symposium on Mathematics and Applied Mathematics, 20th, March 2014, Tokai University(Kanagawa)

③ H.Nagai, Discrete Analogue of the Periodic Phase Soliton Solution, China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems 2013, 18th, March, 2013, Kyoto University(Kyoto)

④ R.Hirota, Y.Ohta, H. Nagai, Discrete and Ultradiscrete Periodic Phase Soliton Solution, Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems 2012, 11th, July, 2012, Crete(Greece)

〔その他〕
ホームページ等
http://sm.u-tokai.ac.jp/~nagai/index2.html

6．研究組織

(1)研究代表者
長井　秀友（HIDETOMO, Nagai）
東海大学・理学部数学科・講師
研究者番号：00572140

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：