

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：22701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740095

研究課題名(和文) グラフの閉路分割に関するラムゼー型問題の研究

研究課題名(英文) A study on Ramsey-type problem concerning cycle partitions in graphs

研究代表者

藤田 慎也 (Fujita, Shinya)

横浜市立大学・国際総合科学部・准教授

研究者番号：60424206

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、グラフ理論のラムゼー型問題において重要な未解決課題となっている辺着色グラフの閉路分割に関する予想の解決に向けて取り組んだ。結果として、予想の解決には至らなかったものの、予想の部分的解決と言える定理や、当該分野において有用な定理を数多く得ることに成功した。特に、グラフの閉路に関する研究で多くの知見が得られた。

研究成果の概要(英文)：In this study, I worked on a conjecture concerning cycle partitions in graphs, which is an important unsolved problem in graph (Ramsey) theory. As a result, although I could not solve this conjecture completely, I obtained some partial results towards the conjecture and also obtained many important results in graph theory. In particular, I could give a substantial contribution to the study of cycles in graphs.

研究分野：グラフ理論

キーワード：グラフのラムゼー数 グラフの閉路 グラフの辺着色 極値グラフ理論 ハイパーグラフ

### 1. 研究開始当初の背景

本研究の主要目的は、1991年に Erdos, Gyarfás, Pyber が提起した次の予想 (以下、EGP 予想と名付ける) について、部分的、もしくは、可能であれば全面的解決を与えることである。

[EGP 予想] 『完全グラフの各辺を  $r$  色でどのように着色しても、頂点集合を  $r$  個以下の単色な閉路によって分割出来る (ここでは 2 点以下の連結グラフも閉路とみなす。)]

完全グラフの辺を複数の色で着色したときに単色の部分グラフを見つけるという問題は、グラフのラムゼー数と深く関係していて、世界中の研究者によって近年盛んに研究が進められている。EGP 予想は、そのような背景のもと、グラフのパッキング問題とラムゼー理論が融合した新しい型の極値問題として多くの研究者の注意を引いた。しかし、その解決は非常に難しく、2006年に Gyarfás 達ハンガリーの研究グループが頂点数の非常に大きい場合に限って、分割の個数に関する上界として  $100r \log r$  という大まかな値 (EGP 予想はこの値を「 $r$ 」まで改善出来ることを主張している) を決定して以降、ほとんど進展が見られず、2010年にフランスの Bessy, Thomasse によって  $r=2$  の場合がようやく (肯定的に) 解決されたという状況である。

### 2. 研究の目的

本研究では、研究代表者がこれまで取り組んできた研究を発展させる形で EGP 予想の解決を目指し、グラフ理論の幅広い分野に適用可能で有用な定理を得ることも目的の一つとした。

研究代表者は、これまでこの問題とは独立に、グラフにおける指定した個数の閉路と 2 点以下の連結グラフによる分割 (以下、これを単に「閉路分割」と呼ぶ) の存在条件に関する研究と、辺着色した完全グラフ上の単色閉路の存在に関するラムゼー型問題の研究に精力的に取り組む成果をあげてきた。このような過去の研究経緯から、研究代表者は、これら 2 つの研究を発展させる形で EGP 予想解決の糸口を見出せる可能性に気づき、「3. 研究の方法」において詳述する 2 方向からの研究アプローチによって EGP 予想解決に挑戦するという着想に至った。

### 3. 研究の方法

研究代表者は、EGP 予想解決のための当面目標として、Gyarfás 達が証明した閉路分割の個数に関する上界「 $100r \log r$ 」の改善を試みた。さらに、彼らが頂点数の大きい完全グラフに限定してその結果を証明したのに対し、本研究では任意の頂点数からなる完全グラフに対して成果を得ることを目標とした。具体的には、次の 2 つの命題の証明に取り組むことで予想解決を目指した。

命題 1. 色の塗り方に関する制約条件  $P$  のもとで  $r$  色を用いて着色した完全グラフ  $K$  は、頂点集合を成分数が  $r$  個以下の単色な閉路に分割出来る。

命題 2. 条件  $Q$  を満たす  $n$  点グラフ  $G$  は指定した成分数  $k$  からなる閉路分割を持つ。

命題 1 からのアプローチ: 最初のステップとして、条件  $P$  を「異なる 3 色からなる三角形を含まない」と設定した場合について考察し、証明を与える。研究代表者による先行研究で得られた成果では、このような制約条件のもとで辺着色された完全グラフ  $K$  が指定した頂点数からなる単色の閉路を必ず含むための  $K$  の頂点数に関する上界・下界について決定した結果がある。この成果は本研究の次の戦略において重要である。

三角形に関する制約条件  $P$  の性質は、完全グラフ  $K$  の頂点を除去するという操作に対して保存される。従って、命題 1 により、単色の閉路を見つけては除去し、残りの部分に再び単色の閉路を見つけては除去するという操作を繰り返し、もし  $r$  回以内のこの操作でグラフの全頂点がなくなれば、それは所望の分割を得たこととなる。実際には、そうならない場合を考慮する必要があるため、これだけではうまくいかないが、それでも「単色の  $r$  個以下の閉路で完全グラフの頂点集合の大部分を覆うことが出来る」という有用な補題の獲得につながる。得られた補題により、そのような閉路の合併  $U$  でサイズが大きいものの存在を保証出来れば、 $U$  と  $K - U$  の間の辺の着色構造を解析し、単色の閉路を適宜取替え最適化をはかることで所望の分割を得るといふ証明手法が機能するようになる。

従って、本研究では、先行研究で得られている結果の更なる改良に取り組むことでこの問題の解決を目指した。また、三角形に関する条件  $P$  上の問題について一定の成果が得られた段階で、条件  $P$  を「各辺の色が異なる四角形を含まない」といったより弱い条件に置き換えて命題 1 の証明を再考し、前の場合と比較検討することで、完全グラフの着色に関する制約を弱めていったときにどのような構造が問題解決の障害となるのかを的確に見極め、一般の場合における EGP 予想解決の糸口を見出すという試みも行った。

命題 2 からのアプローチ: 命題 1 に関するアプローチが辺の塗り方に制約を付けた EGP 予想の弱いバージョンを得ることを念頭に研究を進めるのに対して、命題 2 に関する研究では、予想の直接的解決も視野に入れた密なグラフの部分構造把握について深い考察を行った。条件  $Q$  として、「最小次数  $f(n, k)$  以上」と設定した場合は研究代表者の先行研究において  $f(n, k)$  として最善の値を決定し、実際に命題が成り立つことを示していた。固定した色数で着色したグラフの内部では、単色の部分グラフで辺の数が多い密なグラフの

部分構造が見つかるので、方針としては、そのような単色構造のなかに命題2を適用し、単色の閉路の合併で成分数が少なく、かつ、サイズの大きいものを見つけて除去し、これを繰り返し適用することにより所望の閉路分割を見出すという方策で研究に取組んだ。

#### 4. 研究成果

結果として、残念ながら EGP 予想の解決には至らなかったが、当該分野の研究において多数の有用な研究成果を得ることが出来た。論文[17]では、完全グラフを複数の色で辺着色したときの単色最長閉路に関する良い下界を与えることに成功し、さらに論文[6]でこの下界をある特定の場合についてさらに改善出来た。論文[3,12]では、EGP 予想のハイパーグラフ版に関連する問題の研究について大きく貢献することが出来た。論文[7]では、命題1, 2両方を考察する上での辺着色されたグラフの単色構造の研究で有用な補題を与えている。論文[10,11,15]は命題1の研究に大きく貢献する成果であり、論文[4,8]は命題2に関する研究を大きく進展させている。その他、グラフの連結度や禁止部分グラフ、彩色問題といったグラフ理論の幅広い研究分野にも貢献し、かつ、本研究に関連する成果として計 17 編の論文を著すことが出来、次の新しい研究につながる知見が数多く得られた。

以上を総括すると、本研究助成により十分な研究成果を与えることが出来たのではないかと思われる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 17 件) 全て査読有り

1. S.Fujita, K.Kawarabayashi,  
A connected subgraphs maintaining high connectivity,  
European Journal of Combinatorics Vol.35 (2014) 245-255
2. S.Fujita, M.Furuya,  
Rainbow domination numbers on graphs with given radius,  
Discrete Applied Mathematics Vol. 166 (2014) 115-122
3. S.Fujita, M.Furuya, A.Gyarfas, A.Toth,  
A note on covering edge-colored hypergraphs by monochromatic components,  
Electronic Journal of Combinatorics Vol. 21 (2014) electronic 10pp.  
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/index>
4. S.Chiba, S.Fujita, K.Kawarabayashi, T.Sakuma,  
Minimum degree conditions for vertex-disjoint even cycles in large

- graphs,  
Advances in Applied Mathematics Vol.54 (2014) 105-120
5. S.Fujita, M.Furuya, K.Ozeki,  
Forbidden subgraphs generating almost the same sets,  
Combinatorics, Probability and Computing Vol. 22 (2013) 733-748
  6. S.Fujita, L.Lesniak,  
Revisit of Erdos-Gallai's theorem on the circumference of a graph,  
Information Processing Letters Vol.113 (2013) 646-648
  7. S.Fujita, C.Magnant,  
Forbidden rainbow subgraphs that force large highly connected monochromatic subgraphs,  
SIAM Journal on Discrete Mathematics Vol. 27 (2013) 1625-1637
  8. S.Chiba, S.Fujita,  
Covering vertices by a specified number of disjoint cycles, edges and isolated vertices,  
Discrete Mathematics Vol. 313 (2013) 269-277
  9. S.Fujita, M.Furuya, C.Magnant,  
k-Rainbow domatic numbers,  
Discrete Applied Mathematics Vol. 160 (2012) 1104-1113
  10. S.Fujita,  
Generalized Ramsey numbers for graphs with three disjoint cycles versus a complete graph,  
Electronic Journal of Combinatorics Vol. 14 (2012) electronic 11pp.  
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/index>
  11. S.Fujita, C.Magnant,  
Extensions of Gallai-Ramsey results,  
Journal of Graph Theory Vol. 70 (2012) 404-426
  12. S.Fujita, M.Furuya, A.Gyarfas, A.Toth,  
Partitions of graphs and hypergraphs into monochromatic connected parts,  
Electronic Journal of Combinatorics Vol. 19 (2012) electronic 10pp.  
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/index>
  13. S.Fujita, H.Liu, C.Magnant,  
Rainbow k-connection in Dense Graphs,  
Electronic Notes in Discrete Mathematics Vol.38 (2011) 361-366  
国際会議 proceedings
  14. S.Fujita, K. Kawarabayashi,  
High connectivity keeping connected subgraph,  
Electronic Notes in Discrete Mathematics Vol.38 (2011) 355-360  
国際会議 proceedings
  15. S.Fujita, C.Magnant,

- Gallai-Ramsey numbers for cycles,  
Discrete Mathematics Vol.311 (2011)  
1247-1254
16. S.Fujita, C.Magnant,  
Properly colored paths and cycles,  
Discrete Applied Mathematics, Vol.159  
(2011) 1391-1397
17. S.Fujita,  
Some remarks on long monochromatic  
cycles in edge-colored complete  
graphs,  
Discrete Mathematics Vol.311 (2011)  
688-689

〔学会発表〕(計 15 件)

1. 藤田慎也, G.MacGillivray, 佐久間雅,  
「Safe set problem on graphs」  
応用数学合同研究集会 2014 年 12 月 19  
日 (龍谷大学)
2. 藤田慎也, G.MacGillivray, 佐久間雅,  
「Safe set problem on graphs」  
国際会議 Bordeaux Graph Workshop  
2014 年 11 月 20 日 (ボルドー, 仏国)
3. 藤田慎也, 古谷倫貴, A.Gyarfas,  
A.Toth,  
「A note on covering edge-colored  
hypergraphs by monochromatic  
components」日本数学会秋季総合分科会  
2014 年 9 月 26 日 (広島大学)
4. V.Borozan, G.Chang, N.Cohen, S.Fujita,  
N. Narayanan, R. Naserasr, Z.Tuza,  
「From edge-coloring to strong  
edge-coloring」日本数学会年会 2014  
年 3 月 25 日 (学習院大学)
5. V.Borozan, S.Fujita, M.Furuya,  
Y.Manoussakis, N. Narayanan  
「Partitioning a graph into highly  
connected subgraphs」日本数学会秋季  
総合分科会 2013 年 9 月 25 日 (愛媛大  
学)
6. S.Fujita, 「Monochromatic structure  
in edge-colored graphs」国際会議 8th  
Japanese-Hungarian Symposium on  
Discrete Mathematics and its  
Applications 2013 年 6 月 4 日 (ヴェ  
スプレーム, ハンガリー)
7. 藤田慎也, L. Lesniak 「Revisit of  
Erdos-Gallai's theorem on the  
circumference of a graph 日本数学会年  
会 2013 年 3 月 21 日 (京都大学)
8. S.Fujita, 「On several covering  
problems in edge-colored graphs」国際  
会議 18th Coast Combinatorics  
Conference 2013 年 2 月 18 日 (コナ, 米  
国)
9. S.Fujita, 「Almost spanning  
monochromatic subgraphs in  
edge-colored complete graphs」国際会  
議 4th Pacific Workshop on Discrete  
Mathematics 2012 年 11 月 27 日 (ホノル

- ル, 米国)
10. 藤田慎也, 「Recent progress on  
monochromatic structure in  
edge-colored complete graphs」  
離散数学とその応用研究集会 2012  
2012 年 8 月 9 日 (茨城大学)  
招待講演
11. S.Fujita, 「Cycles in graphs with given  
independence number」国際会議「Cycles  
in graphs」2012 年 5 月 30 日 (ナッシュ  
ビル, 米国)
12. 藤田慎也, 「Some remarks on long  
monochromatic cycles in edge-colored  
complete graphs II」日本数学会年会  
2012 年 3 月 26 日 (東京理科大学)
13. S.Fujita, H.Liu, C.Magnant,  
「Rainbow k-connection in Dense  
Graphs」応用数学合同研究集会 2011 年  
12 月 17 日 (龍谷大学)
14. S.Fujita, K.Kawarabayashi, 「High  
connectivity keeping connected  
subgraph」国際会議 EUROCOMB2011  
2011 年 9 月 1 日 (ブダペスト, ハンガ  
リー)
15. S.Fujita, A.Halperin, C.Magnant,  
「Long path lemma concerning  
connectivity and independence number」  
国際会議 Paul Turan Memorial  
Conference 2011 年 8 月 26 日 (ブダ  
ペスト, ハンガリー)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0 件)  
該当なし

取得状況 (計 0 件)  
該当なし

〔その他〕  
ホームページ等  
該当なし

6. 研究組織
- (1) 研究代表者  
藤田 慎也 (FUJITA SHINYA)  
横浜市立大学・国際総合科学部・准教授  
研究者番号: 60424206
- (2) 研究分担者  
該当なし
- (3) 連携研究者  
該当なし