

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 21 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740101

研究課題名(和文) き裂先端における偏微分方程式の解の特異性からみた破壊現象の解明

研究課題名(英文) Elucidation of fracture phenomena from the viewpoint of singularity of solutions of partial differential equations at crack tips

研究代表者

伊藤 弘道 (ITOU, HIROMICHI)

東京理科大学・理学部・講師

研究者番号：30400790

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：破壊現象への応用を念頭に置き、偏微分方程式の解のき裂先端における挙動を調べた。非線形偏微分方程式の場合は新しい結果を得るまでには至らなかったが、次の研究につながるある解決手法を見つけ出すことができた。き裂と同じ幾何形状の剛性介在物を含む2次元弾性体の境界値問題については、その解の存在と一意性を証明し、その解の介在物先端近傍での収束級数展開を導出した。また本研究の応用として、非破壊検査に関わる、3次元線形粘弾性体における空洞の再構成の逆問題を考察し、物体境界における観測データから未知の空洞の3種の情報を抽出する公式を確立した。

研究成果の概要(英文)：With application of fracture phenomena in mind, we studied the behavior of solutions of partial differential equations at crack tips. In a case of nonlinear equations we did not achieve anything new, but we found a toehold to solve the problem. In a case of boundary value problems in two dimensional elasticity with rigid line inclusions, we proved the existence and uniqueness of the solution and derived the convergent series expansion of the solution near the tip of the rigid inclusion. As an application of this study, we considered a reconstruction problem for cavities in three dimensional linear viscoelasticity, and we established a formula extracting three kinds of information about the unknown cavity from measured data on the boundary.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：き裂 非線形弾性体 粘弾性体 剛性介在物 逆問題

1. 研究開始当初の背景

現在まで偏微分方程式論は滑らかな領域内で理論が確立してきた。しかし、実際の物理現象には滑らかでない領域、例えば、き裂や境界に角を含む領域、での解析が必要なものも少なくない。破壊現象はその代表例であり、地震や様々な材料の安全性など我々の生活に直接影響を及ぼす身近でかつ重要な現象である。現状では工学の分野で盛んに研究が行われているが、理論的にはき裂先端など領域が持つ特異性から解析は非常に困難である。

破壊現象とはき裂進展過程を示す動的現象である。1920年 A.A.Griffith によって2次元線形弾性体領域におけるき裂進展に関する理論的解析が行われ、破壊現象の数理解析の先駆けとなった。その後、静的問題については数学の分野内でもき裂を含む線形弾性体領域における境界値問題を国内外で研究代表者を含む多くの研究者（大塚厚二、C.Constanda、P.A.Krutitskii、V. A. Kovtunenکو、A. M. Khludnev など）が考察してきた。さらに、動的問題について研究代表者は、破壊現象の解明への第一歩として、き裂進展方向について研究を行ってきた。また同時に、その際に現れる特異型積分方程式の近似解の構成やそのアルゴリズムの解析を行ってきた。

このき裂問題を扱う際の本質的な困難は、物体が満たすべき支配方程式（系）の解がき裂先端に特異性を持ち、解の regularity が期待できないことである。この特異性は、物体に負荷がかかる際き裂先端に応力集中が起きていることを意味し、これが破壊を進行させる要因になっている。数学的には、この事が弱解を構成する上で大きな問題となることはないが、き裂進展問題などを扱う際には、き裂が進展する事によって解放されるエネルギーの割合（物体の形状微分）を計算しなくてはならなくなり大きな障害となる。その問題点を克服するためには弱解を構成するだけでなく、解の深い性質、特にき裂先端における挙動を精密に調べる事が肝要である。そこで、これまで研究代表者は2次元の線形弾性体において、物体が等方的及び非等方的の場合のき裂先端における解の収束級数展開、さらに、物体が等方的な場合の角の頂点及びクーロンの摩擦則に従う摩擦効果と非貫通条件を考慮したき裂の先端における解の収束級数展開を導出した。

破壊力学ではこの展開の特異項が重要な意味をもつ。2次元の場合、線形弾性体方程式系の解 U (変位ベクトル) については、き裂先端を中心とする極座標 (r, θ) を用いて

$$u \sim r^\alpha (K_1 \Phi(\theta) + K_2 \Psi(\theta)) \quad (r \rightarrow 0)$$

と表され、特異項の r のべき が特異性のオ

ーダー、特異項の係数 K_1, K_2 は応力拡大係数と呼ばれ、破壊の規模を表すパラメータとして重要な量とされている。上述のき裂先端の場合には等方・非等方両方の場合で $\alpha = 1/2$ となり、角の場合その角度に応じて ($< 1/2$) が定まり、摩擦効果がき裂に入っている場合は、その摩擦係数と材料定数に応じて ($> 1/2$) が定まることが確認できた。それらの収束性を込めた厳密な導出には2次元線形弾性体を扱う際に古くから用いられている Goursat-Kolosov-Muskhelishvili 応力関数の解析性と、解析接続あるいは Riemann-Hilbert 問題の解析といった関数論的手法を駆使した。それによって、き裂といった幾何学的特性、支配方程式系の持つ性質、材料定数などのパラメータが解の特異性にどの様に反映しているかが解明でき、2次元線形弾性体のいくつかの場合にその背景にある数理解析が理解できた。ここでの結果は限定的であるので、さらなる研究の発展が必要である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、き裂を含む以下の場合の領域での境界値問題の解のき裂先端における性質(収束級数展開など)を精密に解析し、それがどのような性質を反映しているのかを理解し、破壊現象の背景にある数理解析を明らかにする事である；

- (1) 定常非線形弾性体
- (2) 熱弾性体など非常数弾性体
- (3) 3次元の定常線形弾性体

3. 研究の方法

上記目的を達成するために、主に平成23年度に研究準備の比較的整っている研究目的(1)と(3)を並行して進め、平成24年度以降にそれらと共に研究目的(2)を遂行する。研究期間全体を通して、本研究を効率的に遂行するため、海外研究協力者3氏：K. R. Rajagopal (テキサス A & M 大学、アメリカ)、V. A. Kovtunenکو (グラーツ大学、オーストリア)、A. M. Khludnev (ラブレントイエフ流体力学研究所、ロシア) の研究支援を要請しながら、以下の手順で研究を進めた。

- (1) 研究目的(1)に対して、考える2次元非線形弾性体の線分き裂を含む領域における境界値問題を定式化する。まずは、応力とひずみの関係式がある種の Power law タイプ(非線形)のモデルを考える。これについてはこれまでに、その導出の物理的背景や破壊現象への適用範囲を

調査し理解しており、さらに凸解析を用いて弱解の一意存在性まで証明できているので、その解のき裂先端における漸近挙動を調べる。その際、他の非線形モデル(塑性など)との比較、検討を行う。線形弾性体の場合は Muskhelishvili らが導出した応力関数の解析接続による方法で解決できたので、そのノウハウを生かし、まずは関数論的手法で考察してみる。

- (2) 研究目的(3)に対して、平面き裂を含む3次元線形弾性体における境界値問題の弱解のき裂の縁における挙動についての研究の現状を正確に把握する。また、構成方程式が弾性体方程式のようなシステムではなく単独の場合、特にラプラス方程式については平面き裂の縁や、錐の頂点における漸近挙動が知られていると思われるので、その導出を調査し、収束性まで証明できるか検証する。そこでのノウハウを線形弾性体方程式系にも適用する。
- (3) 研究目的(2)に対して、まずは固定された線分き裂を含む2次元線形動弾性体に対する初期値境界値問題を考察し、弱解のき裂先端における性質を調べる。必要ならば、周波数領域での解析も行う。その際、応力拡大係数が定数ではなく時間に依存する事が予想され、その評価を行う事により、物体の劣化の問題にも応用できると考えられる。その後さらに、温度の効果を加えた線形熱弾性体モデル(双曲型と放物型 PDE のカップリングシステム)についても同様に解析する。
- (4) 研究目的(1)については他の非線形性を考慮した問題を考える。その場合、先行研究も少なく、境界値問題の弱解の存在性から証明する必要があると思われるので、その際に有効と思われる凸解析や変分法の専門家である研究協力者(Kovtunenکو氏、Khludnev 教授)の研究支援を要請する。(3)については、別の幾何形状の場合(例えば曲面き裂や錐等)も考察してみる。
- (5) 得られた結果を様々な分野における研究集会などで発表する。特に破壊現象に携わる工学者との交流を深め、本研究で扱う数理モデルの妥当性や本研究結果の検証を行う。
- (6) さらに時間的余裕があれば、本研究を発展させていく。例えば、本モデルの初期境界値問題や他の非線形モデルの解析、3次元の問題など。特に本研究の様にき裂などの不連続性をもつ領域における境界値問題の解の性質を解析することは、その不連続性を境界データから再構成する逆問題に深く関連しているため、その問題に応用する。

4. 研究成果

上記研究目的(1)、(2)、(3)に対応させ分けて記す。さらに、本研究の応用として、き裂と同じ幾何形状の剛体介在物に関する結果を得たため、それを(4)として記す。

- (1) 応力・歪み関係式がべき乗則で表される2次元非線形弾性体におけるき裂問題についての研究を行った。このモデルは従来良く扱われてきた線形弾性体よりも広い枠組みで破壊現象を捉えられ実際の現象への適用も期待される。そこで、まず、面外変形(モードIII)を想定した場合を考えると、上記の非線形弾性体方程式はpラプラス方程式(準線形楕円型)となり、この問題について考察した。解の存在性や正則性については既に多くの結果が知られているが、き裂先端における解の詳細な挙動については未解決であり、Muskhelishvili らが導出した応力関数の手法も適用が難しいことがわかった。また、領域の幾何形状や境界条件が特殊な状況の場合に対しては解決の糸口が見つけれられたが、一般の場合、例えばき裂上の応力に対して境界条件を課す場合などについては、未だ結果を得るまでには至っておらず、研究計画を再構築し、現在も鋭意研究継続中である。

2次元弾性体媒質に Timoshenko 梁(等方・非等方)の介在物を含む状況下での境界値問題の研究を行った。この問題は材料科学や固体力学を中心とする工学における様々な場面に現れる重要な問題である。ここでの研究の特徴は、線形弾性体ではあるが、従来数学で扱われてきた境界条件とは異なり、弾性介在物の表面上に非貫通条件や剥離の条件など非線形の境界条件を課したことにある。それにより数学解析は困難となるが、物理的には適切な条件といえる。その結果、境界値問題の一意可解性や弾性介在物の物性(剛性率)を表すパラメータの極限をとることにより、解が、弾性介在物の剛性率を大きくすれば、剛性介在物の場合の解に収束し、小さくすれば亀裂の場合の解に収束するといった、非常に自然な結果を厳密に証明することができた。なお、本研究成果は A.M.Khludnev(Lavrentyev Institute of Hydrodynamics)との共著論文として国際専門雑誌へ掲載される予定である。

- (2) 及び (3) 研究目的(2)および(3)の応用として、非破壊検査に関わる、3次元線形粘弾性体における空洞の再構成の逆問題を考察した。その結果、共同研究者である池島優教授(広島大学)の囲い込み法を援用し、物体境界における時間情報を含んだ

観測データから物体内に潜む未知の空洞の三種の情報(支持関数、物体外部の点からの距離、任意の点を1つ固定しその点を中心とする空洞を含むような球の最小の半径)を抽出する公式を確立した。その際、観測時間については何ら制約条件は不要であるものの、それらの情報を得るためには理論上、無限個の観測データが必要であり、今後の研究に改善の余地がある。この研究成果は池畠氏との共著として、国際学術誌 *Inverse Problems* に掲載された。

- (4) 弾性体中のき裂先端における解の挙動を別の角度から眺めるために、2次元線形弾性体中にき裂と同じ幾何形状の剛性介在物を持つ場合について考察した。この問題の意義は、理論的にはき裂の場合、境界条件を応力に対して与える(ノイマン条件)のが一般的であるが、剛性介在物の場合は変位に対して与える(ディリクレ条件)ので、き裂の場合とは異なった特異性が現れる可能性があり興味深い。また、剥離現象を考慮した境界条件についても考察した(ノイマンとディリクレの混合条件)。その結果、それらの問題を定式化し、境界値問題の解の存在一意性を証明し、その解が介在物先端近傍でどのような振る舞いをするのか、収束級数展開という形で詳細に調べた。さらに、その展開を用い、介在物先端におけるエネルギー解放率が経路不変積分で表現され、その展開の主要項の係数で記述される事を示した。この研究成果はロシアのラブレソフ流体研究所の A. M. Khludnev 氏、E. Rudoy 氏と慶應義塾大学の谷温之教授との共著として国際学術誌 *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* に掲載された。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計4件)

Masaru Ikehata, Hironichi Itou, On reconstruction of a cavity in a linearized viscoelastic body from infinitely many transient boundary data, *Inverse Problems*, 査読有, Vol. 28, No. 12, 2012, 125003 (19pp)
DOI: 10.1088/0266-5611/28/12/125003

H. Itou, A. M. Khludnev, E. M. Rudoy, A. Tani, Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 査読有, Vol. 92, No. 9, 2012, 716-730

DOI: 10.1002/zamm.201100157

[学会発表](計10件)

伊藤 弘道、線形弾性体方程式の解の特異性について、第116回神楽坂解析セミナー、2013.10.26、東京理科大学(東京都)

Hironichi Itou, On convergent series expansions at a corner in linearized elasticity and Inverse problems, *Journées Singulieres Augmentees 2013 Conference en l'honneur de Martin Costabel pour ses 65 ans(JSA2013)*, 2013.8.26、レンヌ大学(レンヌ、フランス)

池畠 優、伊藤 弘道、ある3次元線形粘弾性体における空洞の再構成法について、第62回理論応用力学講演会、2013.3.7、東京工業大学(東京都)

伊藤 弘道、On convergent series expansions of solutions of the linearized elasticity equation near singular points, 偏微分方程式の逆問題解析とその周辺に関する研究、2012.11.21、京都大学数理解析研究所(京都府)

M. Ikehata, H. Itou, On reconstruction of a cavity in a linearized viscoelastic body from transient boundary data, *INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS (The International Conference dedicated to the 80th anniversary of the birthday of Academician Mikhail Mikhailovich Lavrent'ev)*, 2012.8.10、ノボシビルスク(ロシア)

Hironichi Itou, A. M. Khludnev, E. M. Rudoy, Atusi Tani, On asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity, 日本応用数学会研究部会連合発表会、2012.3.8、九州大学(福岡県)

Hironichi Itou, On Convergent Expansions of Solutions of the Linearized Elasticity Equation near Singular Points, 9th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2011), 2011.9.21、ハルキディキ(ギリシャ)

H. Itou, On convergent expansions of solutions of the linearized elasticity equation near singular points, 6th International conference on Mathematical Modeling (ICMM2011), 2011.7.5、ヤクーツク（ロシア）

伊藤 弘道、線形弾性体方程式の解のき裂先端における特異性について、九州関数方程式セミナー、2011.7.1、福岡大学セミナーハウス（福岡県）

〔図書〕（計1件）

伊藤 弘道 他、朝倉書店、応用数理ハンドブック、2013、80-83

〔産業財産権〕

出願状況（計0件）

取得状況（計0件）

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.rs.tus.ac.jp/h-itou/>

6．研究組織

(1)研究代表者

伊藤 弘道（ITOU HIROMICHI）

東京理科大学・理学部・講師

研究者番号：30400790

(2)研究分担者

(3)連携研究者