科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 １４ 日現在

機関番号：１３１０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７４０１０４

研究課題名（和文）線形及び非線形ヘルムホルツ型方程式の漸近解析と逆解析

研究課題名（英文）Asymptotic analysis and inverse problems for linear and non-linear Helmholtz type equations

研究代表者
渡邊　道之（Watanabe, Michiyuki）

新潟大学・人文社会・教育科学系・准教授

研究者番号：９０３７４１８１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,100,000円、（間接経費）　630,000円

研究成果の概要（和文）：地震波のモデル方程式である半空間弾性波動方程式の定常解の漸近挙動とフーリエ変換との関係を調べる研究を行った。本研究により以下の4つの基本問題が解決した。（１）フーリエ変換を構成すること，（２）解集合をフーリエ変換で記述すること，（３）レゾルベントの漸近展開を求めること，（４）定常解の漸近展開を求めること。
これらの結果により，特殊な場合ではあるが，異方性をもち複雑な伝播をする弾性波動方程式の解（地震波）の漸近的振る舞いが明らかとなった。

研究成果の概要（英文）：An elastic wave equation in a homogeneous, isotropic, elastic half-space with a free boundary and with a constant density and constant body-wave velocities has been investigated as a simple model of the equation describing the seismic wave propagation. We study a relation between asymptotic behavior of a generalized eigenfunction to the stationary elastic wave equation and the Fourier transform associated with the elastic wave equation. In this research, we obtained that the set of solutions can be described by the Fourier transform and the asymptotic expansion of the solution can be evaluated for all direction.

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式　偏微分方程式論　散乱理論　逆問題

１．研究開始当初の背景

物理現象は偏微分方程式で記述されることが多い。その中でヘルムホルツ方程式とは、時間と空間の両方を含む偏微分方程式の解を、時間変数と空間変数との変数分離の形で求める際に、時間によらない部分の関数（空間変数の部分）が満たす方程式のことである。

無限遠方から飛んできた粒子が力を受けて進路を変え、再び無限遠へ飛び去る運動、音波や光が媒質の中を反射、屈折を繰り返し伝播する現象、これらの物理現象は時間と空間の両方を含む偏微分方程式で記述される。それらはシュレーディンガー方程式、波動方程式と呼ばれている。

遠方から来た粒子（または波）が標的（または媒質）によってどのように進路を変えて再び遠方に飛び去っていくのか？これを散乱問題という。逆に、散乱された粒子または波を観測し、そのデータから標的や媒質の物理的性質を決定できるか？この問題を散乱の逆問題という。

偏微分方程式の散乱問題は、方程式の解の無限の過去の状態と無限の未来の状態とを比較する問題として定式化され、それは「時間依存的方法」と呼ばれている。

一方で、時間に依存しない方法すなわち、「定常的方法」による散乱問題の取り組みも行われている。シュレーディンガー方程式または波動方程式の解を、(時間に関して周期的）×（空間変数）の形で変数分離を行う。このとき空間変数の部分が満たす方程式を、定常シュレーディンガー方程式、波動方程式の場合には定常波動方程式またはヘルムホルツ方程式という。本研究では、便宜上このように変数分離を行って得られる空間部分が満たす方程式を、総じてヘルムホルツ型方程式と呼ぶことにする。

「定常的方法」による散乱問題は、ヘルムホルツ型方程式の解の無限遠方での挙動を比較する問題として定式化される。「時間依存的方法」と「定常的方法」は、散乱問題という同一の事柄を２つの側面からみたものである。

散乱の逆問題の「定常的方法」は、直線上（空間１次元の）シュレーディンガー方程式に対して研究され、散乱行列の構成を経て散乱の逆問題におけるゲルファント・レビタン理論の確立へと発展した。この理論は半直線上の問題やスペクトル逆問題とも関連があることがわかった。さらに、非線形の方程式（KdV 方程式）の厳密解を求める方法にも利用され（逆散乱法）その応用範囲は極めて広いことが知られている。

その後、「定常的方法」による散乱の逆問題へのアプローチは多次元へと拡張された。中でもファデーフのポテンシャル再構成理論は境界値逆問題（物体の表面での観測データから内部の情報を推定する問題）とも関連があることがわかり、様々な方面に応用されている。

一方で、散乱問題に対する「時間依存的方法」も発達し、量子力学、音響学、地震学などに現れる多くの方程式で研究が進められてきた。しかし、散乱の逆問題に関しては「時間依存的方法」は「定常的方法」に比べるとそれほど発達しておらず、研究成果は乏しい。

このように、「定常的方法」は応用範囲も広いためその重要性が強く認識されてきた。しかし、以下の方程式においては「定常的方法」は発展途上にあった。

A)　地震学に現れる半空間における弾性波動方程式
B)　音響学に現れる層状媒質における波動方程式
C)　量子力学に現れる非線形シュレーディンガー方程式

その理由は、A)半空間のため性質のことなる波が複雑に現れ反射すること、B)媒質が層であることにより生じる複雑な波の反射屈折があること、C)非線形であるため基本解の表示が困難であること、にある。基本解が複雑になりその漸近挙動が局所的にしかわからないことが共通する主な原因であった。

ところで、現実の物理現象の多くは非線形であり、当然それらのモデル方程式は非線形の偏微分方程式となる。これらの定常方程式は非線形ヘルムホルツ型方程式となる。非線形偏微分方程式の散乱問題は、時間依存的方法が主流であり、定常的方法によるアプローチはほとんどない。上で述べた研究の背景を踏まえると、定常的方法で研究を行うほうがよりよい成果が得られるのではないか。

２．研究の目的

本研究の目的は、線形及び非線形のヘルムホルツ方程式の係数または非線形項と、解の遠方での挙動との関係を解析することである。本研究では

A) 地震学に現れる半空間における弾性波動方程式
B) 音響学に現れる層状媒質における波動方程式
C) 量子力学に現れる非線形シュレーディンガー方程式

の３つの方程式に対する散乱問題および散乱の逆問題を「定常的方法」によって研究する。「定常的方法」による研究をする意義は、散乱の逆問題へと発展させることができ、さらには数値計算への可能性も期待できることにある。なお、本研究で考える散乱の逆問題とは、ヘルムホルツ型方程式の解によって構成される散乱行列（又は散乱振幅）から方程式の係数を同定する問題のことである。
　本研究により、散乱問題および散乱の逆問題に関する「定常的方法」が、地震学、音響学に現れる方程式ならびに非線形系へと広く適用できるようになるばかりではなく、逆問題の新しい展開を図る契機につながることが期待できる。

３．研究の方法
　散乱理論の専門家である磯崎洋氏（筑波大学）と層状媒質における波動方程式の専門家である門脇光輝氏（愛媛大学）と研究打ち合わせを行いながら、共同研究として計算を進めた。自己共役作用素のスペクトル解析、フーリエ解析、積分の漸近解析を用いて地震学に現れる弾性波動方程式の定常解の構造解析を行った。

４．研究成果
　本研究により、散乱理論における４つの基本問題

① フーリエ変換を構成すること。
② 解集合をフーリエ変換で記述すること。
③ レゾルベントの漸近展開を求めること。
④ 一般化された固有関数の漸近展開を求めること。

が、半空間定数係数弾性波動方程式に対して解決した。①については先行研究があったため、本研究の成果は②、③、④である。特に、③と④について、すべての方向に対して漸近展開式を得たことは大きな成果である。
　本研究で得られた結果は、半空間弾性波動方程式に対する散乱理論の基礎的結果である。この結果を礎に、摂動の入った弾性波動方程式の散乱理論の研究、さらには地球内部の構造を地震波から同定する逆問題の研究がさらに発展すると期待できる。
　本研究で得られた解析手法は、非等方的に伝播する波動現象を記述する偏微分方程式にも適用できる可能性がある。複雑な波の伝播の様子を数式で詳細に記述できることは、数値シミュレーションを可能にし、さらには現実の問題への応用も可能になる、と期待できる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
① 渡邊道之、Inverse Scattering for the Stationary Wave equation with a Friction Term in Two Dimensions、Publications of Research Institute for Mathematical Sciences、査読あり、Vol. 49、2013、155-176。

〔学会発表〕（計１件）
① 渡邊道之、Inverse scattering at fixed amplitude for nonlinear Schrödinger equations、日本数学会関数方程式論分科会、2012 年 9 月 20 日、九州大学。

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）
名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
なし

６．研究組織
(1)研究代表者
　渡邊　道之（WATANABE MICHIYUKI）
　新潟大学・人文社会・教育科学系・准教授

研究者番号：90374181

(2)研究分担者
該当者なし（　　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
該当者なし（　　　　）

研究者番号：