

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 7 日現在

機関番号：17501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740108

研究課題名(和文) 距離空間上の2つの変動指数をもつ関数空間

研究課題名(英文) Functional spaces of two variable exponents on metric measure spaces

研究代表者

大野 貴雄 (Ohno, Takao)

大分大学・教育福祉科学部・准教授

研究者番号：40508511

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,100,000円、(間接経費) 330,000円

研究成果の概要(和文)： n 次元ユークリッド空間ではSobolev空間に対応するMusielak-Orlicz-Hajlasz空間について、様々な諸性質(Poincareの不等式、連続関数の稠密性、容量の性質)や極大作用素の有界性などについて研究を行い、その応用として、Musielak-Orlicz-Hajlasz空間に対するRieszポテンシャルのSobolevの不等式について研究を行った。また、上記の研究成果を基に、Musielak-Orlicz-Newtonina空間に対しても、様々な諸性質(連続関数の稠密性、容量の性質、Lebesgue点、Fugledeの定理)の研究を行った。

研究成果の概要(英文)：Our aim is to study Musielak-Orlicz Sobolev spaces on metric measure spaces. We consider a Hajlasz type condition and a Newtonian type condition. We prove that Lipschitz continuous functions are dense as well as other basic properties. We study the relationship between these spaces, and discuss Lebesgue point theorem in these spaces. We also deal with the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator on Musielak-Orlicz spaces. As an application of the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator, we establish a generalization of Sobolev's inequality for Sobolev functions in Musielak-Orlicz-Hajlasz spaces.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学

キーワード：変動指数をもつ関数空間 距離空間 Sobolevの不等式 Hajlasz空間 ポテンシャル論

1. 研究開始当初の背景

楕円型微分方程式の1つである p -ラプラス方程式の解の研究は、古くから日本のみならず、世界中多くの研究者によって研究され、様々な応用がなされてきた。しかし近年、以下のような宇宙開発分野からの要請により、 p -ラプラス方程式をより一般化した非標準の増大条件をもつ楕円型微分方程式の解空間(変動指数をもつ関数空間)の研究が、注目を集めるようになってきた。

電場を印加することで粘弾性が変化する ER 流体は、電氣的に粘弾性特性を制御可能であることから、高速制御性や機構の簡易性を活かし、NASA などで宇宙開発の分野への応用が非常に期待されていた。しかしその一方、ER 流体の高い制御性を得るためには、正確な ER 効果と流れの形態のモデル化、その解の性質が必要なため、さらなる研究の発展が求められていた。このような問題に対し、近年、ER 効果と流れの形態のモデル化の研究が進み、非標準の増大条件をもつ楕円型微分方程式の解空間が重要な役割を持つことが明らかになった。ここに、この解空間が、変動指数をもつ関数空間(一般化された Lebesgue 空間、一般化された Sobolev 空間)である。

2. 研究の目的

本研究では、変動指数をもつ関数空間の研究と ER 流体の研究のさらなる発展のために、距離空間上の2つの変動指数をもつ関数空間の必須の基礎的条件を解明し、この分野の世界的なスタンダードを築くことを目的とする。具体的には、次の計画の実現を目指す。

(1) n 次元ユークリッド空間では Sobolev 空間に対応する2つの変動指数をもつ Hajlasz 空間の諸性質、Poincare の不等式、連続関数の稠密性、容量の性質などの研究を行う。

(2) 距離空間上の2つの変動指数をもつ関数空間における極大作用素の有界性について研究を行う。

(3) (2)が保障されるのであれば、極大作用

素の有界性を利用することで、距離空間上の2つの変動指数をもつ関数空間に対する Riesz ポテンシャルの Sobolev の不等式について研究を行う。

(4) (3)と関連して、2つの変動指数をもつ Hajlasz 空間に対する Sobolev の不等式について研究を行う。

3. 研究の方法

距離空間上の2つの変動指数をもつ Hajlasz 空間について、下限に達する Hajlasz 微分の存在、Poincare の不等式、連続関数の稠密性、容量の性質を示す。また、 n 次元ユークリッド空間や従来の p 乗可積分空間の議論を応用することにより、距離空間上の2つの変動指数をもつ関数空間における極大作用素の有界性を示す。さらにその応用として、距離空間上の2つの変動指数をもつ関数空間に対する Riesz ポテンシャルの Sobolev の不等式を示すことにより、2つの変動指数をもつ Hajlasz 空間に対する Riesz ポテンシャルの Sobolev の不等式を示す。

4. 研究成果

当初の研究計画では、2つの変動指数をもつ Hajlasz 空間について、様々な諸性質(Poincare の不等式、連続関数の稠密性、容量の性質)や極大作用素の有界性などについて研究を行い、その応用として、2つの変動指数をもつ Hajlasz 空間に対する Riesz ポテンシャルの Sobolev の不等式について研究を進めていく予定だったが、同時期に研究を進めていたユークリッド空間上の Musielak-Orlicz 空間の研究が応用可能であることが判明したため、2つの変動指数をもつ Hajlasz 空間ではなく、Musiellak-Orlicz-Hajlasz 空間に対して、当初の研究目的である Riesz ポテンシャルに対する Sobolev の不等式について研究を行った。ここに、Musiellak-Orlicz 空間はこれまでの Lebesgue 空間や Orlicz 空間だけでなく、変

動指数をもつ Lebesgue 空間, 当初の研究対象であった2つの変動指数をもつ関数空間などを拡張した関数空間であるため, 本研究で得られた関数空間の性質や Sobolev の不等式などは, 様々なタイプの楕円型微分方程式の解の存在や正則性の研究に応用されることが期待される. さらに, 上記の研究成果を基に, Musielak-Orlicz-Newtonina 空間に対しても様々な諸性質 (連続関数の稠密性, 容量の性質, Lebesgue 点, Fuglede の定理) の研究を行った. ここに Newtonina 空間とは, Hajlasz 空間と同様に, n 次元ユークリッド空間では Sobolev 空間に対応する関数空間である.

これらの研究成果により, 正確な ER 効果と流れの形態のモデル化, その解の性質の研究が進み, 宇宙開発だけではなく, ブレーキ, クラッチなどの応用デバイス開発, または, 次世代フルードパワーシステムなどの多くの分野で実用化・製品化されることを期待する.

今後の研究展望としては, 上記の研究成果をいかし, 距離空間上の Musielak-Orlicz 空間における Dirichlet integral の最小値問題の解の存在などを研究していきたい.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

(1) Fumi-Yuki Maeda, Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno and Tetsu Shimomura
Hardy's inequality in
Musiellak-Orlicz-Sobolev spaces,
Hiroshima Math. J. 掲載予定.

(2) Takao Ohno and Tetsu Shimomura
Trudinger's inequality for Riesz
potentialsof functions in Musielak-Orlicz
spaces,
Bull. Sci. Math. 138 (2014), 225-235.

DOI 10.1016/j.bulsci.2013.05.007

(3) Fumi-Yuki Maeda, Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno and Tetsu Shimomura
Approximate identities and Young type
inequalities in Musielak-Orlicz spaces,
Czech. Math. J. 63, no. 4 (2013), 933--948.

(4) Fumi-Yuki Maeda, Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno and Tetsu Shimomura
Boundedness of maximal operators and
Sobolev's inequality on
Musiellak-Orlicz-Morrey spaces,
Bull. Sci. Math. 137, (2013), 76--96.
DOI 10.1016/j.bulsci.2012.03.008

(5) Fumi-Yuki Maeda, Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno and Tetsu Shimomura
Trudinger's inequality and continuity of
potentials on Musielak-Orlicz-Morrey
spaces,
Potential Anal. 38, (2013), 515--535.
DOI 10.1007/s11118-012-9284-y

(6) Yoshihiro Mizuta and Takao Ohno
Orlicz capacity of balls,
Centre de Recherches Mathematiques, CRM
Proceedings and Lecture Notes, 55, (2012),
225--233.

(7) Yoshihiro Mizuta, Eiichi Nakai, Takao Ohno and Tetsu Shimomura,
Maximal functions, Riesz potentials and
Sobolev embeddings
on Musielak-Orlicz-Morrey spaces of
variable exponent in \mathbb{R}^n ,
Rev. Mat. Complut. 25, (2012), no. 2,
413--434.
DOI 10.1007/s13163-011-0074-7

〔学会発表〕(計3件)

大野 貴雄,

Approximate identities and Young type inequalities in Musielak-Orlicz spaces,
日本数学会, 2012年9月18日, 九州大学伊都キャンパス

大野 貴雄,

Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Musielak-Orlicz-Morrey spaces of variable exponent in R^N ,
日本数学会, 2011年9月30日, 信州大学松本キャンパス

大野 貴雄,

Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces,
日本数学会, 2011年9月30日, 信州大学松本キャンパス

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大野 貴雄 (OHNO, takao)

大分大学・教育福祉科学部・准教授

研究者番号: 40508511