

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 28 日現在

機関番号：24506

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740110

研究課題名(和文) 区分的に滑らかな係数を持つ偏微分方程式の解の更なる解析，及び逆問題への応用

研究課題名(英文) Analysis of solutions to partial differential equations with piecewise smooth coefficients, and its application to inverse problems

研究代表者

永安 聖 (NAGAYASU, Sei)

兵庫県立大学・物質理学研究科・講師

研究者番号：90455684

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円、(間接経費) 570,000円

研究成果の概要(和文)：この研究目的の一つは、あるパラメータを含む偏微分方程式が与えられたとき、そのパラメータが偏微分方程式の解にどのような影響を及ぼすかについて調べることである。本研究期間では、振動数を含むような方程式の係数決定逆問題の安定性評価に重点を置き研究を進めた。その結果、音響方程式やシュレディンガー方程式の係数決定逆問題に対し、ある安定性評価を得ることができた。この得られた安定性評価は、振動数を大きくしたときに安定性が良くなることを示唆しているものである。但し、この評価が最良かどうかについてはまだ不明であるため、今後引き続き解析していきたいと考えている。

研究成果の概要(英文)：Now we consider partial differential equations (PDEs) with some parameter. The parameter gives some influences for the solutions to PDEs. One of the aim of this research is to analyse such influences. In this study period, I analysed stability estimates for inverse problems of PDEs with frequency. In particular, we treated the wave equation and the Schroedinger equation. In consequence, I obtained some stability estimates. These stability estimates suggest us that stability becomes better when influence becomes large. However, unfortunately right now we do not know this estimate is optimal or not. Hence I would like to continue to analyse this problem.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：偏微分方程式 逆問題 安定性評価

## 1. 研究開始当初の背景

一般に、偏微分方程式の解析に於いて、偏微分方程式中にある様々なパラメータが解などにどのように影響するかを調べるのは重要なことである。それは偏微分方程式の順問題だけではなく逆問題に対しても言えることである。そこでこれらの解析をすることが、本研究課題の大きな目的であった。

さて、偏微分方程式の逆問題の主要なテーマの一つに介在物同定の逆問題がある。そしてこれを偏微分方程式によって解析する際には、考えるべき偏微分方程式は係数が区分的に滑らかな関数となる。よって、例えば介在物と元々の物体との距離が安定性にどのように影響するのか、或いは複数の介在物が存在するときには介在物同士の距離が安定性にどう影響するのかについて調べることは重要なことである。このような幾何学的な条件に注目した安定性の解析はまだそれほど多くなく、これからの研究の発展が必要な研究領域であった。

ところで近年、振動数を含むような偏微分方程式に対する係数決定逆問題の安定性評価の研究が盛んに行われるようになってきた。特に、振動数が大きくなるとそれに応じて安定性が良くなることを示唆する評価が得られるようになってきた。これは振動数をパラメータとして見ることにより、これはパラメータ(振動数)が安定性評価にどう影響するかについての解析と行うことができる。この種の現象は、数値的には[CHP]の結果で確認されていた。そして数学的な視点からの解析が、まずは[HI]によってなされた。彼らはヘルムホルツ方程式  $(\Delta+k^2)u=0$  の逆問題について考え、振動数  $k$  を大きくするとこの逆問題の安定性が良くなる、ということを示唆する安定性評価を導いた。その後[SI07]によりヘルムホルツ方程式の逆問題に対するこの種の安定性評価の更なる解析が行われた。又、ヘルムホルツ方程式以外にもマクスウェル方程式[SI11]、シュレディンガー方程式[I]に対してこの種の安定性評価についての解析が行われた。ただ、[I]の結果は、方程式などに現れる幾つかのパラメータの関係によって安定性評価の表示が大きく変わるため、その安定性評価の解釈は容易ではなかった。そこで申請者は、まだ考察の行われていなかった音響方程式、そして[I]によって解析は行われていたものの得られている安定性評価の解釈が容易ではなかったシュレディンガー方程式についての解析を試みた。

[CHP] Colton-Haddar-Piana (2003)

[HI] Hrycak-Isakov (2004)

[SI07] Subbarayappa-Isakov (2007)

[SI11] Subbarayappa-Isakov (2011)

[I] Isakov (2011)

## 2. 研究の目的

「1. 研究開始当初の背景」でも述べた通り、本研究課題の目的を大きな枠組みで述べると、偏微分方程式中にある様々なパラメータが、順問題ならば解などに、また逆問題ならば安定性評価などに与える影響について解析することである。

これに関し、この度は主に、振動数  $k$  を含むような偏微分方程式に対する係数決定の逆問題の安定性評価、特に振動数  $k$  がその安定性評価に与える影響について解析した。その際、安定性評価中に  $k$  が現れるが、その現れ方があまりにも複雑であれば安定性評価を解釈するのが難しくなる。そこで、より解釈のし易い安定性評価を得ることを第一の目的とした。

## 3. 研究の方法

本研究では主に、音響方程式  $(\Delta+k^2q(x))u(x)=0$  やシュレディンガー方程式  $(\Delta+k^2+q(x))u(x)=0$  に対する係数決定逆問題の安定性評価について解析した。

まず、この種の方程式のディリクレ問題には解の一意性があるとは限らないため、観測データとしては、通常よく使われるディリクレ・ノイマン写像の代わりに、コーシーデータを用いた。

本研究に於いては、解釈のし易い安定性評価を得ることを第一の目的とした。そのため、解析が比較的容易な  $L^2$  空間を基礎としたソボレフ空間の上で考えることにした。そこで  $q(x)$  は  $H^s$  に属するとし、この  $q(x)$  に対するアプリアリ仮定としてソボレフノルムの有界性を採用することにした。

安定性評価を得るのによく使われるのは、いわゆる Alessandrini の恒等式に複素幾何光学解(CGO 解)を代入する方法である。本研究に於いても、大きな枠組みとしてはこの手法を採用した。但し我々は観測データとしてディリクレ・ノイマン写像ではなくコーシーデータを用いたので、Alessandrini の恒等式に関しても、通常の恒等式ではなく、そのコーシーデータ版ともいべき評価式を使った。CGO 解に関しては、音響方程式に対する逆問題を解析する際には最もよく知られた Sylvester-Uhlmann (1987) のものを使った。一方、シュレディンガー方程式に対する逆問題を解析する際には、最終的には Sylvester-Uhlmann の CGO 解ではなく、Hähner (1996) の CGO 解を使った。Hähner の CGO 解は、シュレディンガー方程式を考える際には非常に有効な CGO 解である。そして今  $L^2$  を基礎としたソボレフ空間を用いて解析をしているので、二つの関数  $q_1(x)$  と  $q_2(x)$  の差を計る際にもソボレフノルムを用いた。以上のことを組み合わせれば安定性評価を得ることが

できるのだが、その際  $k$  がどこに現れるかについては注意深く解析した。

#### 4. 研究成果

主結果中のアプリアリ仮定などの詳細についてはここでは省くが、解析の結果、音響方程式の場合には

$$(w) \quad |q_1 - q_2| \leq C \exp(Ck^2) d + C(k^2 + \log(1/d))^{-m},$$

シュレディンガー方程式の場合には

$$(s) \quad |q_1 - q_2| \leq Ck^4 d + C(k + \log(1/d))^{-m}$$

なる安定性評価を得た。ここで  $d$  は二つの係数  $q_1, q_2$  に対応するコーシーデータ  $D_1, D_2$  の差を表す。又、 $C$  は  $k$  には依らない定数である。ここで  $E = \log(1/d)$  と置くと、 $d \rightarrow 0$  のとき  $E \rightarrow \infty$  であり、またそれぞれの評価の右辺は

$$(w) \quad C(E+k^2)^{-m} + C e^{Ck} e^{-E} = E^{-m} - mk^2 E^{-m+1} + \dots$$

$$(s) \quad C(E+k)^{-m} + Ck^4 e^{-E} = E^{-m} - mk E^{-m+1} + \dots$$

となる。よって、上の式の右辺の展開の第 2 項に注目すると、 $k_1 > k_2$  なる二つの振動数  $k_1, k_2$  を考えたとき、振動数が大きい  $k_1$  の場合の方が安定性はよくなると考えられる。

これらの評価に関してもう一つ注意すべきことは、(s) の評価に於いて  $d$  の係数が  $k$  の多項式増大 ( $k^4$ ) で済んでいる点である。これは CGO 解として Hähner のものを選んだからこそ得られる結果である。尚、もしシュレディンガー方程式に対しても Sylvester-Uhlmann の CGO 解を使っていれば、(w) と同様、 $d$  の係数は  $k$  の指数増大となってしまう。

現在得られている安定性評価は上からの評価のみであり、その最良性についてはまだ確かめられていない。この点は今後の課題である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件) いずれも査読有

(1) Victor Isakov, Sei Nagayasu, Gunther Uhlmann, Jenn-Nan Wang,

``Increasing stability of the inverse boundary value problem for the Schrödinger equation'',  
Contemporary Mathematics **615** (2014)  
印刷中.

(2) Jishan Fan, Kyoungsun Kim, Sei Nagayasu, Gen Nakamura,

``A gradient estimate for solutions to parabolic equations with discontinuous coefficients'',  
Electronic Journal of Differential Equations **2013** (2013), No. 93, 1–24.  
<http://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2013/93/abstr.html>

(3) Sei Nagayasu, Gunther Uhlmann, Jenn-Nan Wang,

``Increasing stability in an inverse problem for the acoustic equation'',  
Inverse Problems **29** (2013), 025012 (11pp).  
<http://stacks.iop.org/IP/29/025012>

[学会発表] (計 8 件)

(1) 永安聖

(Victor Isakov 氏, Gunther Uhlmann 氏, Jenn-Nan Wang 氏との共同研究),  
``Increasing stability of the inverse boundary value problem for the Schrödinger equation'',  
微分方程式セミナー,  
大阪大学, 2013 年 5 月 31 日.

(2) 永安聖

(Victor Isakov 氏, Gunther Uhlmann 氏, Jenn-Nan Wang 氏との共同研究),  
``Increasing stability in inverse problems for some equations'',  
南大阪応用数学セミナー,  
大阪府立大学, 2013 年 5 月 18 日.

(3) 永安聖

(Victor Isakov 氏, Gunther Uhlmann 氏, Jenn-Nan Wang 氏との共同研究),  
``Increasing stability in an inverse problem for some equations'',  
逆問題とその周辺分野に関するミニワークショップ,  
東京大学, 2013 年 3 月 27 日.

(4) Sei Nagayasu

(Victor Isakov 氏, Gunther Uhlmann 氏, Jenn-Nan Wang 氏との共同研究),  
``Increasing stability in an inverse problem for the acoustic equation and the Schrödinger equation'',  
Taiwan-Japan Joint Conference on PDE and Analysis 2012, 国立台湾大学 (National Taiwan University, 台湾),  
2012 年 12 月 27 日.

(5) Sei Nagayasu

(Gunther Uhlmann 氏, Jenn-Nan Wang 氏との共同研究),  
``Increasing stability in an inverse problem for the acoustic equation'',  
International Conference on Inverse Problems and Related Topics 2012,  
東南大学 (Southeast University, 中国),  
2012 年 10 月 25 日.

(6) 永安聖

(講演内容には Gunther Uhlmann 氏, Jenn-Nan Wang 氏との共同研究, 及び

Jishan Fan 氏, Kyoungsun Kim 氏, 中村  
玄氏との共同研究を含む),  
``区分的に滑らかな係数を持つ偏微分方  
程式の解の勾配評価と偏微分方程式の逆  
問題における介在物再構成の問題'',  
逆問題への応用を意図した解析学の研究  
(RIMS 共同研究),  
京都大学数理解析研究所,  
2012 年 7 月 25, 26 日.

(7) 永安聖

(Gunther Uhlmann 氏, Jenn-Nan Wang 氏  
との共同研究),  
``Increasing stability in an inverse  
problem for the acoustic equation'',  
微分方程式の総合的研究,  
東京大学, 2011 年 12 月 17 日.

(8) 永安聖

(Gunther Uhlmann 氏, Jenn-Nan Wang 氏  
との共同研究),  
``Increasing stability in an inverse  
problem for the acoustic equation'',  
微分方程式セミナー,  
大阪大学, 2011 年 11 月 11 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

永安 聖 (NAGAYASU, Sei)  
兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・  
講師  
研究者番号: 90455684