

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 27 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2011～2012

課題番号：23740112

研究課題名（和文） 自己双対錐を不変にする線形作用素の固体物理学への応用

研究課題名（英文） Applications of operator inequalities induced by self-dual cones to the solid state physics

研究代表者

宮尾 忠宏（MIYAO TADAHIRO）

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：20554421

研究成果の概要（和文）：

ヒルベルト空間における自己双対錐から自然に導かれる作用素不等式の性質を調べ、その結果を固体物理学におけるいくつかのモデルに適用した。応用例として Holstein-Hubbard model、SSH model、Frohlich model が挙げられる。具体的に得た結果は、1次元 Holstein-Hubbard model や SSH model において、基底状態が一意になること、その結果として、基底状態の磁気的な特性が明らかになったことが挙げられる。

研究成果の概要（英文）：

Self-dual cones in the Hilbert space naturally induce useful operator inequalities. We studied mathematical aspects of the inequalities and applied these to the condensed matter physics. For instance, the Holstein-Hubbard, SSH and Frohlich models are investigated from the viewpoint of our operator inequalities. We showed that ground states are unique in the Holstein-Hubbard and SSH models. This reveals interesting magnetic structures in the ground states.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：関数解析、数理物理学

科研費の分科・細目：解析学基礎

キーワード：作用素不等式、自己双対錐、電子格子相互作用系、基底状態

1. 研究開始当初の背景

Perron と Frobenius により発見された、線形代数学における定理「非負行列 A は既約ならば、最大固有値は一意的（縮退しない）であり、最大固有値の固有ベクトルの成分はすべて正に取ることが出来る」は、その単純さと美しさにより、現在では理論系の研究者の多くに知られている。この Perron-Frobenius の定理は、古くから物理学において多くの実り多い結果をもたらしてきた。例えば、

Lieb-Mattis による、一次元電子系のエネルギーの順序付けの研究において、基底状態の一意性が重要な役割を演じる。その証明の際に、彼等が用いた技巧も形は違えども、Perron-Frobenius の定理そのものであった。

この定理とは別に、構成的場の量子論に起源をもつ、スピン鏡映正值性という概念は強相関電子系の解析などに応用され、成功を収めてきた。例えば、量子スピン系における相転移の証明に初め

て到達したのは、スピン鏡映正值性を駆使したグループであった。その適用には、幾分厳しい制約が課せられるが、適用できれば様々な結果が導き出せるという、強力な方法であることが今日では認識されている。

一方で、Perron-Frobenius の定理とスピン鏡映正值性は全く独立した概念であると思われてきた。これは発展の歴史や背景を考えれば、無理からぬことだと言えるだろう。この一見無関係な二つの理論に統一的な構造があるということを見聞させてくれたのが、Lieb による Hubbard model における基底状態の磁性の研究である。Lieb による Hubbard model の解析は、ハミルトニアンのもつ特性をスピン鏡映正值性の観点から解き明かしたものである。その証明は、Perron-Frobenius の定理と等価であった、前述の Lieb-Mattis の理論を思い起こさせるものであり、二つの理論の間にある、ある種の統一的な構造を見聞することが出来る。

2. 研究の目的

本研究の目的は、これまで独立した概念と思われてきた、Perron-Frobenius の定理とスピン鏡映正值性の間の関連性を明らかにし、そうして得た知見を固体物理学のモデルに応用することである。特に、電子・格子相互作用系への応用を念頭に置いた理論構築を行う。電子・格子相互作用系への Perron-Frobenius の定理やスピン鏡映正值性の応用は、これまでに何人かの研究者が試みているが、電子と格子の相互作用に強い制限を課した状況での結果しかなかった。本研究では、このような制限のない技巧を開発することも一つの主目的である。

3. 研究の方法

Perron-Frobenius の拡張の主な方向性は、2乗可積分な関数全体のなすヒルベルト空間において、正值保存作用素や正值改良作用素を議論していた。また、非可換な L^2 空間への拡張もあるが、制約が強く、具体的な応用にはあまり適していなかった。そこに現れたのが、Faris による Perron-Frobenius の抽象化である。Faris 理論では L^2 という構造は必要ではなく、抽象的なヒルベルト空間の自己双対錐を基準に理論を構築してある。抽象性が高い分、これまでの理論よりも広い領域での応用が見込まれるが、その反面、抽象的な設定をチェ

ックするのに幾分の困難がある。

本研究では、Faris 理論の枠組みの中で、スピン鏡映正值性の性質を明らかにする。Faris 理論は自己双対錐を基本として理論を展開することは前述のとおりである。さらに、自己双対錐を不変に保つ線形作用素のなす作用素不等式が、新たな視点を提供してくれる。この作用素不等式は作用素の積について閉じているという、著しい性質を持つために様々な興味深い作用素の関係を導くことが可能になる。このように Faris 理論を作用素不等式の理論として見直し、理論を拡張した点は本研究の独自な方法であり、かつ結果の一つでもある。スピン鏡映正值性は、見方を変えると拡張された Faris 理論の枠内で取り扱うことが出来ることが分かる。拡張された枠組みの中で再解釈されたスピン鏡映正值性の概念を更に発展させ、得られた知見を固体物理学におけるいくつかのモデルに適用した。一言で表すならば、スピン鏡映正值性を新しい作用素不等式で表現し、発展させたということである。

4. 研究成果

スピン鏡映正值性の応用の中で、最も重要な結果のひとつである、Hubbard モデルに関する Lieb の定理を、拡張された Faris 理論の観点から整備した。Lieb による原論文では、ハミルトニアンの性質を巧みに使った基底状態の一意性の証明が与えられている。我々の理論では、ハミルトニアンに付随する熱半群を考え、その経路積分による評価を行う。その際に、電子間のクーロン斥力が負になるという仮定が必要になるが、電子が住んでいる格子が bipartite であるならば、適切なユニタリー変換を施すことにより、この仮定が実際に満たされていることをチェックできる。

得られた結果を Holstein-Hubbard model や SSH model といった、電子格子系に応用した。このことにより、これらのモデルにおける基底状態の一意性が明らかになり、その結果、基底状態における磁気的な特性が明らかになった。具体的には以下の通りである。

(1) 1次元 Holstein-Hubbard model
1次元電子系は通常 Perron-Frobenius の定理の恰好の応用の場所であった。これは Lieb-Mattis により認識された。本研究では、1次元電子・格子相互作用系を記述する Holstein-Hubbard model を考察した。このモデルは電子と格子の相互作用がある

ために、Lieb-Mattis による標準的な方法では扱えない。このモデルを調べたのは、まさにこの点によるもので、我々が発展させた不等式理論が既存の理論では扱えないモデルにまでを拡張できるかという点を確認したかったからである。結果は、この模型でも基底状態は一意であり、基底状態が正の値を取ることににより、磁氣的順序付けが起こるというものであった。これは Lieb-Mattis の結果の自然な拡張である。我々の結果において、クーロン力の強さや電子格子間の相互作用の強さには一切制限が付かない。

(2) SSH model

SSH model も 1 次元電子・格子相互作用系を記述するよく知られたモデルである。SSH model に関して少し詳しく述べると、この模型は hopping matrix が格子変数に依存しており、既存の解析方法では取り扱いが難しかった。このような理由により、数学的に厳密な結果はほとんどなかった。我々はこの困難を克服する方法を考案した。具体的には、ハミルトニアン生成する熱半群を考察し、その高温展開を考える。ここまでは、Hubbard model と同じ手続きなのだが、Hopping matrix の格子依存性により、Hubbard model では使えた率直な評価が適用できなくなる。そこで、格子部分も経路積分表示して、確率論的な考察も組み合わせた評価方法を開発した。その結果、ハミルトニアン生成する熱半群は正值改良性を持つことがわかり、拡張された Faris 理論により、基底状態の一意性が従う。このことにより、基底状態は擬スピン作用のゼロ固有ベクトルになっていることが分かる。これらの結果は、これまでに知られていなかったものである。

(3) Peierls 不安定性

1 次元 Frohlich 模型において、Peierls 不安定性が現れることを数学的に厳密に示した。Peierls 不安定性とは、1 次元電子・格子系においてエネルギー的に最も低い格子配置は周期 a (a は格子間隔) ではなくて $2a$ であると述べることができる。従って、周期 a の格子に電子を置くとエネルギー的に不安定になるのである。これまでの Peierls 不安定性の研究では、格子変数を古典的に取り扱う、所謂 Born-Oppenheimer 近似を用いたものがほとんどであった。我々の方法では、格子も量子論的に取り扱うことができる。ここで用いられたアイデアのポイントは、1 次元フェルミ面の対称性と、particle-hole 変換と呼ばれるユニタリ

変換を組み合わせることである。この二つの特性を組み合わせることににより、我々が開発した作用素不等式理論を応用できる。

(4) その他の結果

上記以外にも、ミュンヘン工科大学の Herbert Spohn 教授と共に非相対論的量子電気力学で標準的に用いられる、Pauli-Fierz 模型の研究を行った。中性原子間には van der Waals 力と呼ばれる引力が働く。これは、原子間の距離の -6 乗に比例する。この共同研究に先立つ研究で、我々は量子電磁場の効果まで考慮すると、引力は原子間距離の -7 乗に比例することを経路積分を用いて考察した。本研究では適切なスケールリングパラメータを取ることににより、引力の強さが原子間距離の -6 乗から -7 乗に変化することを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① T. Miyao,
Ground state properties of the SSH model, Journal of statistical physics, 149, 519-550 (2012)、査読有
- ② T. Miyao and H. Spohn
Scale dependence of the retarded van der Waals potential, Journal of mathematical physics, 53, 095215 (2012) (15 pages)、査読有
- ③ T. Miyao,
Note on the one-dimensional Holstein-Hubbard model, Journal of statistical physics, 147, 436-447 (2012) 査読有
- ④ T. Miyao,
Self-dual cone analysis in condensed matter physics, Reviews in mathematical physics, 23, 749-822 (2011)、査読有

[学会発表] (計 2 件)

- ① 宮尾 忠宏、フレーリッヒ模型の数学的側面、「量子場の数理解析とその周辺」、京都大学数理解析研究所 2012年11月15日
- ② 宮尾 忠宏、Pauli-Fierz 模型のスペクトル解析、談話会、北海道大学 201

2年7月26日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮尾 忠宏 (MIYAO TADAHIRO)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：20554421

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし