

平成 26 年 6 月 19 日現在

機関番号：35302

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740113

研究課題名(和文) 2点境界値問題の非振動解の個数及び振動解の長さとフラクタル次元

研究課題名(英文) The number of nonoscillatory solutions and the length and the fractal dimension for two-point boundary value problems

研究代表者

田中 敏 (TANAKA, Satoshi)

岡山理科大学・理学部・教授

研究者番号：90331959

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円、(間接経費) 600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では非線形常微分方程式の2点境界値問題を考えた。正值解は非振動解の一種である。正值解のモース指数を求めることによって、正值解の対称性の崩壊を示した。それにより、正值対称解と正值非対称解の存在が示され、正值解の非一意性の結果を得た。1次元の p ラプラス作用素をもつ非自励系の問題の正值解がちょうど2個存在するための十分条件を得た。ある楕円型偏微分方程式の球対称振動解のフラクタル次元を求めた。

研究成果の概要(英文)：In this study, two-point boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations were considered. The positive solution is a kind of nonoscillatory solutions. The symmetry-breaking for positive solutions was proved by finding the Morse index of positive solutions. Then the existence of positive symmetry solutions and positive asymmetry solutions was shown, and therefore, a result of the nonuniqueness of positive solutions was established. A sufficient condition is obtained for the existence of exact two positive solutions of problems with one dimensional p -Laplacian. The fractal dimension of radial oscillatory solutions for a class of elliptic partial differential equations was found.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：2点境界値問題 正值解 球対称解 一意性 フラクタル次元

1. 研究開始当初の背景

優線形の2点境界値問題の研究の歴史は非常に古く、Moore-Nehari (1959) により正值解の存在が、Hartman (1977) によって符号変化する非振動解、即ち、零点の個数が有限個である解の存在が示されている。正值解が一意的であるための十分条件は多く得られており、Moroney (1962)、Coffman (1967)、Ni-Nussbaum (1985)、Kwong (1990)、Dalmaso (1995)、Korman (2001) などの結果がある。その過去の結果のほとんどが、ある関数の挙動のみによる結果である。しかしながら、研究開始当初、研究代表者はそれとは別のタイプの結果を導き、ある関数の挙動のみが正值解の一意性に関与している訳ではないことを示唆した。従って、何が正值解の一意性を特徴付けるのかが疑問となった。それを見るためには、正值解が一意的でない場合を調べる必要があったが、2点境界値問題には古くから多くの研究があるにも関わらず正值解の非一意性については Nehari-Moore と Coffman の特殊な例があるだけで、正值解が非一意的であるための十分条件のようなものは得られていなかった。また、1次元の p -Laplace 作用素をもつ問題の正值解の厳密な個数の研究は、自励系の場合には多くの結果があるが、非自励系の場合の結果は研究代表者の結果を含む数少ない結果があるだけであった。自励系の場合には time-mapping 法というにより、問題が陰に解けることで解析ができるのだが、非自励系の問題ではその方法をまったく使うことができない。

問題が端点で特異性をもつ場合は、振動解、即ち、零点の個数が無限個である解が現れることがある。クロアチアのザグレブ大学の Pasic 氏によって、2003 年に2階線形常微分方程式の有限長振動解、無限長振動解に関する研究が、2008 年に無限長振動解のフラクタル次元に関する研究が発表された。しかしながら、この分野の研究はまだ始まったばかりで、まだまだ不明な点が多い状況であった。

2. 研究の目的

本研究では次のような問題に取り組む。

- (1) 優線形の問題について正值解が非一意であるため十分条件を与える。
- (2) 1次元の p -Laplace 作用素をもつ非自励の問題の正值解がちょうど2個であるための十分条件の導く。
- (3) chirp 関数と呼ばれる関数のフラクタル次元を求める公式を与える。
- (4) 楕円型偏微分方程式の球対称振動解のフラクタル次元を求める。

3. 研究の方法

優線形の問題の正值解が非一意であるための十分条件を得るためには、本研究では、解のモース指数を計算し、対称解と非対称

解のその指数に違いがあることを示すことで、その両方の存在を導くという方法をとる。ただし、ここで扱う解は厳密解ではないから一般にはそのモース指数を計算するのは容易ではない。そこで、本研究では解のモース指数はある線形化問題の解の零点の個数と等しいという事実に着目し、その線形化問題の解の零点を求めるという方法をとる。そのためにはある種の恒等式を見つける必要があり、その発見が重要となる。

正值解の厳密な個数の研究は shooting method を利用した Kolodner-Coffman の方法に基づいて行う。shooting method とは、初期値問題の解を考え、初期値をパラメータとして、解の零点の挙動を調べることにより、境界値問題を解析するという方法である。

以前に Pasic 氏が開発した判定法の一般化を行うことで、chirp 関数のフラクタル次元の判定法を得る。

楕円型偏微分方程式の球対称振動解のフラクタル次元を求めるためには、二つのことが必要である。一つは球対称振動解を満たす常微分方程式の振動解のフラクタル次元を求めることである。それは上述の chirp 関数のフラクタル次元の判定法と解の漸近挙動を組み合わせる。もう一つは球対称関数に関するフラクタル次元の公式を見つけることである。それは円環領域であればクロアチアのザグレブ大学の Zubrinic 氏が見つけたものがあるのでそれを利用する。

効率的に研究を進めるためにも Pasic 氏や韓国ウルサン大学の Inbo Sim 氏と電子メールで連絡を取り合う。また、詳細な打ち合わせのため、Pasic 氏や Sim 氏のもとに出張する。さらに、国内外の他の研究者と十分な研究連絡・情報交換を行い、様々な研究集会に参加して情報を収集して、より効率的に研究を進める。また、研究代表者自身で下記のような研究集会を主催し、他の研究者との交流を深め、研究成果を発表し、情報交換を行った。

研究集会名：International Workshop
Handayama Differential Equation Seminar
日時：2012年11月6日
会場：岡山理科大学 20号館7階 応用数学科ゼミ室
主催者：田中 敏（岡山理科大・理）、鬼塚政一（岡山理科大・理）

研究集会名：RIMS 研究集会「常微分方程式の大域的定性理論とその応用」
日時：2012年11月7日～9日
会場：京都大学 数理解析研究所 1階 111号室
研究代表者：田中敏（岡山理大・理）
副代表者：宇佐美広介（岐阜大・工）、内藤雄基（愛媛大・理）

研究集会名：関数方程式の定性的理論ワークショップ

日時：2013年3月18日～19日

会場：岡山理科大学 25号館5階 22553講義室

主催者：濱谷義弘（岡山理科大・総合情報），長淵裕（岡山理科大・理），田中敏（岡山理科大・理），鬼塚政一（岡山理科大・理）

研究集会名：岡山理科大学における微分方程式セミナー（微分方程式セミナー通算第36回）

日時：2013年9月9日～10日

会場：岡山理科大学 10221講義室

主催者：宇佐美広介（岐阜大・工），田中敏（岡山理大・理），内藤学（愛媛大・理）

研究集会名：半田山微分方程式セミナー

日時：2013年12月12日

会場：岡山理科大学 20号館8階 応用数学科ゼミ室

主催者：田中 敏（岡山理科大・理）

研究集会名：半田山微分方程式セミナー

日時：2014年2月4日

会場：岡山理科大学 20号館8階 応用数学科ゼミ室

主催者：田中 敏（岡山理科大・理）

4. 研究成果

今回の研究にていくつかの結果を得ることができた。それは、下記の〔雑誌論文〕にあげた論文にまとめて公表し、また、〔学会発表〕のように講演発表した。

〔雑誌論文〕の論文 では、ある楕円型偏微分方程式の球対称解のフラクタル次元を求めることに成功した。これまで、楕円型方程式の球対称解のフラクタル次元はほとんど調べられていなかった。今後はこの論文を足がかりにして様々な楕円型方程式の球対称解のフラクタル次元を求めることが可能になることが期待される。

論文 では1次元の p -Laplace 作用素をもつ非自励問題の正值解がちょうど2個であるための十分条件の導いた。これまで、1次元の p -Laplace 作用素をもつ問題の正值解の厳密な個数の研究については、自励系の場合には多くの結果がある一方、非自励系の場合の結果は極端に少なかった。本研究ではそのなかでも正值解のちょうど2個の存在を示しているが、そのような結果は過去には得られていなかった。

論文 では1次元の Henon 方程式と呼ばれる非線形常微分方程式を含むようなある方程式の正值解の非一意に関する新しいタイプの結果を得ている。そこで扱った方法はこれまであまり見ない方法で、解のモース指数を計算する方法を確立し、それによって、正值解の対称性の崩壊を示し、その

非一意性を示すという方法である。正值解の対称性の崩壊を示す手段は最小エネルギーと対称な関数に対する最小エネルギーに差があることを証明するという方法がよくとられるが、その方法では最小エネルギー解の対称性の崩壊しか示すことができない。一方、本研究の方法はそれ以外の解に対してもそれを示すことができるもので、最小エネルギー解が対称性の崩壊を起こさない問題にも応用可能な方法で、今後の発展が期待される方法である。また、優線形の問題の正值解が一意であるための十分条件によく現れるある関数が何の役目を果たすのか、長年、不明であったが、本研究により、その関数が正值解の一意・非一意を決定する重要な関数であることが判明した。

論文 では chirp 関数などのある関数のフラクタル次元を求める判定法を導いた。それを利用することで2階線形微分方程式の振動解のフラクタル次元を求めることができた。その結果は非常に一般的で、過去の様々な結果を含むだけでなく、それだけではない新しい例をいくつか与えるものである。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計5件)

Y. Naito, M. Pasic, S. Tanaka, D. Zubrinic, Fractal oscillations near the domain boundary of radially symmetric solutions of p -Laplace equations, *Contemporary Mathematics* **601: Fractal Geometry and Dynamical Systems in Pure and Applied Mathematics II** (2014), 325-343, 査読有。

I. Sim, S. Tanaka, Exact multiplicity of positive solutions for a class of two-point boundary value problems with one-dimensional p -Laplacian, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics* **144** (2014), no. 1, 187-203, 査読有。

S. Tanaka, Morse index and symmetry-breaking for positive solutions of one-dimensional Henon type equations, *Journal of Differential Equations* **255** (2013), no. 7, 1709-1733, 査読有。

M. Pasic, S. Tanaka, Fractal oscillations of chirp functions and applications to second-order linear differential equations, *International Journal of Differential Equations* **2013**, Art. ID 857410, 11 pp, DOI: 10.1155/2013/857410, 査読有。

M. Pasic, S. Tanaka, Fractal oscillations of self-adjoint and damped linear differential equations of

second-order, *Applied Mathematics and Computation* **218** (2011), no. 5, 2281-2293, 査読有.

[学会発表](計19件)

Satoshi Tanaka, Uniqueness of nodal radial solutions for a Dirichlet problem with an exponent near 1 in some 2-dimensional annulus, 2014 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2014年3月28日, 韓国 釜山, 釜山大学

田中 敏, 2点境界値問題の正值解の対称性の破れ, 松山解析セミナー 2014, 2014年2月7日, 愛媛大学

田中 敏, A note on the symmetry-breaking and Morse index for positive solutions of one-dimensional Henon type equations, 日本数学会 2013年度秋季総合分科会, 2013年9月24日, 愛媛大学

Satoshi Tanaka, Morse index and symmetry-breaking for positive solutions of one-dimensional Henon type equations, Equadiff 13, 2013年8月29日, チェコ プラハ カレル大学

Satoshi Tanaka, Morse index and symmetry-breaking for positive solutions of one-dimensional Henon type equations, ICCM 2013, 2013年7月16日, 台湾 台北 台湾大学

田中 敏, Exact multiplicity of positive solutions for a class of two-point boundary value problems with one-dimensional p -Laplacian, 日本数学会 2013年度年会, 2013年3月21日, 京大 数理研

田中 敏, 一次元 p -Laplace 作用素をもつ2点境界値問題の正值解の厳密な個数, 振動理論ワークショップ - 松山 2013, 2013年2月10日, 愛媛大学

Satoshi Tanaka, Morse indices of positive solutions for the one-dimensional Henon equation and its application to the number of positive solutions, International Workshop on Stationary Problems in Nonlinear Partial Differential Equations, 2013年1月25日, 佐賀大学

田中 敏, 優線形2点境界値問題の正值解の非一意性 正值偶関数解の対称性の破れ, 日本数学会 2012年度秋季総合分科会, 特別講演, 2012年9月18日, 九州大学

Satoshi Tanaka, On the nonuniqueness of positive solutions for a class of superlinear problems, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012年7月3日, アメリカ フロリダ

田中 敏, 2階線形常微分方程式の振動解のフラクタル次元, 日本数学会 2012年度

年会, 2012年3月26日, 東京理大

田中 敏, 優線形2点境界値問題の正值解の非一意性, 日本数学会 2012年度年会, 2012年3月26日, 東京理大

田中 敏, 2階線形常微分方程式の振動解のフラクタル次元, 微分方程式の定性的理論ワークショップ, 2012年3月3日, 島根大学

Satoshi Tanaka, Exact multiplicity of positive solutions for a class of two-point boundary value problems with one-dimensional p -Laplacian, 2012 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2012年2月19日, 韓国 釜山大学

Satoshi Tanaka, Rectifiable and fractal oscillations of second-order linear differential equations, International Symposium on Nonlinear Pukyong National University, 2012年2月9日, 韓国 Pukyong National University

田中 敏, 2階線形常微分方程式の振動解のフラクタル次元, 振動理論ワークショップ - 尾道 2012, 2012年2月3日, 尾道大学

Satoshi Tanaka, Nonuniqueness of positive solutions of two-point boundary value problems for superlinear equations, Equadiff 2011, 2011年8月5日, イギリス ラフバラ大学

Satoshi Tanaka, Rectifiable oscillations of self-adjoint and damped linear differential equations of second-order, International Workshop on Geometric and fractal analysis of PDEs and differential systems in Zagreb 2011, 2011年7月29日, クロアチア ザグレブ大学

Satoshi Tanaka, On the nonuniqueness of positive solutions of two-point boundary value problems for superlinear equations, 2011 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2011年6月21日, 韓国 釜山大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 敏 (TANAKA, Satoshi)

岡山理科大学・理学部・教授

研究者番号: 90331959