様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：３３９１９
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７４０１１４
研究課題名（和文）冪零型１階線型および半線型偏微分方程式におけるジュブレイ漸近理論

研究課題名（英文）Gevrey asymptotic theory for first-order linear and semi-linear partial differential equations of nilpotent type

研究代表者
日比野　正樹（Hibino, Masaki）

名城大学・理工学部・准教授

研究者番号：１０４４１４６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,600,000円、（間接経費）　480,000円

研究成果の概要（和文）：２複素変数冪零型と呼ばれる、特異１階線型偏微分方程式において、その発散冪級数解がボレル総和可能となるために方程式が満たすべき条件を与えること、を最終目標として研究を行いました。結果として、予想の段階ではありますが、その条件を、方程式の係数に対する大域的条件（解析接続性、増大または減少性）の形で与えることに成功しました。さらに、幾つかの特殊な（但し、これまでには扱われていない）方程式に対しては、予想が正しいことの証明に成功しました。

研究成果の概要（英文）：We studied two complex dimensional singular first-order linear partial differential equations of nilpotent type. Our main purpose was to give conditions for equations under which the divergent power series solution is Borel summable. As a consequence, we could conjecture conditions, in forms of global conditions (analytic continuation property, growth conditions or decreasing conditions) for coefficients of equations. Moreover, we could accomplish the proof of conjecture for some special, but have not been treated previously, equations.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式論　複素解析　発散級数　総和可能性　解析接続

１．研究開始当初の背景

２複素変数冪零型と呼ばれる、原点を特異点とする１階の線型および半線型偏微分方程式に対して、その原点を中心とした形式的冪級数解を考えたとき、「それは一意的に存在するが、収束解ではなく発散解である」という、研究代表者（以下、「代表者」と略記）によって証明された事実があります。（線型方程式に対しては１９９９年に、半線型方程式に対しては２００４年に証明されました。）一般に、上記の事実が証明されたとき、次に生ずる自然な問題の一つとして、「その発散解を漸近展開に持つような真の解（漸近正則解）が存在するか」という漸近展開の問題があります。

（１）線型方程式の場合、代表者によって２００３年に「開きの角の大きさがπ以下の角領域を考える限りは、方程式の係数に条件を付加せずとも、その領域上でのジュブレイ型の漸近正則解が常に（無限個）存在する」という事実が証明されました。ここで述べた「漸近正則解の存在領域の開きがπ以下」という条件は非常に重要であり、領域の開きがπよりも大きくなると、一般には漸近正則解の存在は期待できません。しかし、存在するならばそれは一意的であることが知られており、このとき発散解はボレル総和可能と呼ばれ、漸近正則解はボレル和と名付けられています。そこで、「方程式の係数がどのような条件を満たせば発散解がボレル総和可能となるか」という問題を、方程式を徐々に一般化させながらこれまで研究してきました。しかしながら、本研究の研究開始当初の段階では方程式の完全な一般化に到達しておらず、理論の適用範囲を拡げるためにも、この一般化を達成する必要がありました。

発散解のボレル総和可能性の問題は、常微分方程式論においては、１９８０年に J.P.Ramis 氏によって総和可能性の概念が導入されて以来、多くの数学者によって研究がなされてきました。そして、最終的に１９９２年、B.L.J.Braaksma 氏によって「方程式に条件を課さずとも、常微分方程式の発散解は常に（幾分一般化された意味で）総和可能である」という非常に強力な結果が証明され、一応の解決を見ました。一方、偏微分方程式論においては、１９９９年に D.A.Lutz 氏、R.Schäfke 氏、三宅正武氏による熱方程式に対する共同研究によって初めて取り上げられ、それ以来、偏微分方程式の発散解がボレル総和可能となるための条件を求めることが、漸近展開理論における一つの重要な研究課題になっています。例えば代表的なものに、W.Balser 氏、三宅正武氏による、熱方程式を一般化した或る定数係数の高階方程式の研究（１９９９年、２００４年）や M.Michalik 氏による高次元熱方程式の研究（２００６年、２０１２年）があります。代表者の扱っている方程式は彼らの扱ったものとはタイプの異なる変数係数の方程式であり、先に述べた方程式の完全な一般化を達成することは、漸近展開理論を発展させるという観点からも、重要な研究課題となっていました。

（２）（１）において述べたように、線型方程式における漸近正則解の存在問題は、存在領域の開きの角の大きさがπ以下である限りは、方程式に条件を課さずとも肯定的に解決されます。同様の結果が半線型方程式においても成り立つかどうかという問題が当然生じますが、これに対する解答はまだ与えられていませんでした。この問題は、それ自身が重要な数学的問題であるのはもちろんのこと、その解決がさらに半線型方程式におけるボレル総和可能性の問題の研究へ繋がっていくため、出来るだけ早く解答を与える必要がありました。

発散冪級数という、かつては解析的意味が弱いと考えられていたものに、ポアンカレによる漸近展開の概念の導入によって解析的意味が与えられて以来、発散解に対する漸近正則解の存在という問題は、複素解析的常微分方程式論における一つの重要な問題として位置付けられ、W.Wasow 氏、福原満洲雄氏、渋谷泰隆氏等、多くの研究者によって研究が進められてきました。そして様々な型の方程式の発散解に対し、その漸近正則解の存在についての（存在領域の開きが小さい場合の）肯定的解答が与えられ、発散冪級数解が解析的に十分意味を有するものであるということが、認められるようになりました。

近年、少しずつではありますが、偏微分方程式論においても同様の研究が進みつつあります。代表的なものに大内忠氏による代数的偏微分方程式に対する１９９５年の研究、上述の D.A.Lutz 氏らによる熱方程式に対する１９９９年の共同研究があります。この分野における一つの新しい成果をあげようという目的で、彼らの扱ったものとはタイプの異なる冪零型方程式に対して同様の結果を（方程式が線型の場合に）与えたものが、（１）で述べた２００３年の研究でした。

２．研究の目的

（１）最も一般的な２複素変数冪零型１階線型偏微分方程式において、その発散冪級数解がボレル総和可能となるために方程式が満たすべき十分条件を、これまでの研究の一般化となるような形で求める。さらにその条件が技術的なものではなく本質的なものであることを示すために、条件が成り立たず、発散解がボレル総和可能とならないような反例を構成する。

（２）一般の２複素変数冪零型１階半線型偏微分方程式において、その発散冪級数解に対するジュブレイ型の漸近正則解の存在に

ついて考察する。特に、線型方程式の場合と同様の結果、即ち、開きの角の大きさがπ以下の角領域上では、方程式の係数に条件を付加せずとも、漸近正則解が存在するかどうかを確かめる。仮に無条件には存在しないのであれば、存在を保証するために方程式の係数が満たすべき条件を求める。

３．研究の方法

（１）２複素変数冪零型１階線型偏微分方程式における発散解のボレル総和可能性の研究：一般的に、微分方程式の発散解がボレル総和可能であることの証明は、方程式に形式的ボレル変換を施して得られる方程式の解が、或る方向に無限遠方にまで解析接続されて、指数関数増大度を持つことの証明に帰着されます。従って、発散解がボレル総和可能となるための条件を予想するためには、この変換後の方程式を明確な形で書き表すことが必要となります。本研究開始当初までの研究により、我々が扱っている冪零型方程式の場合、変換後の方程式の明確な表示を得るためには、変換によって導かれる或る１階線型偏微分作用素の特性曲線を具体的に表現しなければならないことが分かっています。そこでまず、この特性曲線の具体的表示を得ることを目標に研究を進め、それが得られた後、変換後の方程式を明確な形で導き、それを用いて、もとの方程式の係数が満たすべき条件を予想します。

予想結果の証明方法：これまでの研究により、変換後の方程式は、上記の特性曲線の具体的表示を用いれば、合成積方程式、さらにはそれと同値な無限階積分方程式の形で表されることが分かっています。（実際に条件を予想するときには、これら２通りの方程式を導き、それらを解析することになります。）予想した条件の下で、この方程式の解に対する解析接続可能性および指数関数増大性を証明することが目標となりますが、解析接続可能性については合成積方程式を用いて、指数関数増大性については無限階積分方程式を評価することによって証明します。

（２）２複素変数冪零型１階半線型偏微分方程式の発散解に対する、開きの小さい領域における漸近正則解の存在についての研究：この問題については、線型方程式の場合に肯定的解答が得られており、半線型方程式の場合も漸近正則解は存在すると予想しております。そこで、線型方程式の場合の証明と同様の論法を適用することによって、この予想の証明に挑戦します。

予想結果の証明方法：まず、発散解ｕに対してｕをジュブレイ型の漸近展開に持つような正則関数（これはまだ解ではない）ｖを取ります。（存在領域の開きがπ以下の場合、このｖの存在は Borel-Ritt の定理と呼ばれる定理によって保障されています。）そして、このｖを、ｕを漸近展開に持つという性質を保存したまま変形して、解ｗを構成します。（このｗが求める漸近正則解となります。）上記の証明法は、線型方程式の場合の証明法と同じですが、最後のｗを構成する際、線型方程式の場合に用いた方法は、半線型方程式に対しては適用出来ないため、適用可能な新しい方法を探します。

４．研究成果

「３．研究の方法（１)」で述べた研究（２複素変数冪零型１階線型偏微分方程式における発散解のボレル総和可能性の研究）において、以下の成果を挙げました：

（１）方程式に形式的ボレル変換を施して得られる１階線型偏微分作用素の特性曲線に対して、その具体的表示を得ることに成功しました。

（２）（１）で得られた特性曲線の具体的表示を用いて、ボレル変換後の方程式を明確な形（２通りの形：合成積方程式および無限階積分方程式）で表すことに成功しました。またそれを基に、発散解がボレル総和可能となるために、もとの方程式の係数が満たすべき条件を予想することも可能になりました。最終的に、その条件は、(ｉ）方程式の係数に対する解析接続可能性；(ｉｉ）係数の偏導関数に対する或る種の増大（または減少）条件；の形で与えられるという予想に到達しました。

（３）幾つかの特殊な（但し、これまでには扱われていない）方程式に対しては、(２）で得られた予想が正しいことを、逐次近似法を用いて証明することに成功しました（学会発表①②)。

偏微分方程式論における発散解のボレル総和可能性の研究は、世界的に研究者の数が多くないということもあり、未だそれほど進んでおりません。本研究によって、この分野の研究の発展にわずかながら貢献出来たのではないかと考えております。

しかし、最も一般な方程式に対する予想の証明には到達出来ませんでした。研究を中断せず、この目標への到達を目指します。また、「３．研究の方法（２)」で述べた研究（２複素変数半線型偏微分方程式に対する、開きの小さい角領域における漸近正則解の存在についての研究）については、公表に値する研究成果を挙げることが叶わず、多くの課題が残されています。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① 著者名：Masaki HIBINO
論文表題：On the summability of formal solutions for singular first-order linear partial differential equations
雑誌名：Research Reports of the Faculty of Science and Technology. Meijo University
査読の有無：査読有り
巻：５２
発行年（西暦）：２０１２年
ページ：１－６

〔学会発表〕（計３件）

① 発表者名：日比野　正樹
発表表題：On the summability of divergent power series solutions of certain first-order linear PDEs
学会等名：Formal and Analytic Solutions of Differential, Difference and Discrete Equations
発表年月日：２０１３年8月２６日
発表場所：Mathematical Research and Conference Center, Bedlewo, Poland

② 発表者名：日比野　正樹
発表表題：或る１階線型偏微分方程式に対する発散冪級数解の総和可能性について
学会等名：２０１３日本数学会年会
発表年月日：２０１３年3月２０日
発表場所：京都大学

③ 発表者名：日比野　正樹
発表表題：１階偏微分方程式に対するCauchy-Kowalevsky の定理の不動点定理による証明
学会等名：２０１２日本数学会年会
発表年月日：２０１２年3月２６日
発表場所：東京理科大学

６．研究組織
(1)研究代表者
日比野　正樹（HIBINO, Masaki）
名城大学・理工学部・准教授
研究者番号：１０４４１４６１