

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 12 日現在

機関番号：37112

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740116

研究課題名(和文)非線形消散型波動方程式における時間大域的可解性と非線形作用の関係性

研究課題名(英文)Relationship between the global solvability and a non-linear action for a nonlinear damped wave equation

研究代表者

竹田 寛志 (Takeda, Hiroshi)

福岡工業大学・工学部・准教授

研究者番号：10589237

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、消散型波動方程式に代表される、弱消散項を含む一連の非線形偏微分方程式の時間大域可解性と非線形項の影響の関係性について研究を行った。特に、非線形消散型波動方程式の連立系の時間大域解の熱核による近似に対する十分条件と、四階の空間拡散項と弱消散項を線形主要部に持つ非線形分散型方程式(非線形消散型梁方程式、加速度付きCahn-Hilliard方程式、弱い摩擦項付き三次元等温 Falk-Konopka モデル)の解の漸近挙動を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We studied the relationship between the global solvability and the effect of the nonlinear term for nonlinear partial differential equations with weak damping as represented by a nonlinear damped wave equation. More precisely, we obtained the sufficient condition for the approximation of the solution for a system of nonlinear damped wave equation by the heat kernel. We also considered the large time behavior of the global solutions for nonlinear dispersive equations with the weak damping and the fourth order diffusion (nonlinear damped beam equations, the Cahn-Hilliard equation with inertial term, the Falk-Konopka system of shape memory alloys with weak damping).

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非線形消散型波動方程式 非線形消散型梁方程式 高次漸近展開 時間減衰評価

1. 研究開始当初の背景

消散型波動方程式の研究の歴史は古く、その数学解析の起源は古典的エネルギー法にまで遡る。その中でしばしば熱方程式の解の性質との類似性が指摘され、解の減衰の様相はよく知られるようになっていた。その後、初期値問題における解の分解(特に線形解から熱方程式の解を引き去ると残りの部分が時間に関して指数減衰し、また空間に関する正則性が波動方程式の解と一致する)と(方程式の構造に即した重み関数を用いる)重み付きエネルギー法が提案された後、消散型波動方程式の研究は多くの研究者によって展開され、初期値の減衰の遅い場合の研究や、連立系などへ広がりを見せていた。また、単独方程式において、変数係数を消散項に付与し、その変化に応じた解の性質を考察する方向性が主流になりつつあった。

2. 研究の目的

非線形消散型波動方程式に対して、さらに

- (1) 障害物からの影響(外部問題)
 - (2) 連立系における非線形相互作用の影響(連立系)
 - (3) 高階空間拡散項からの影響(高階化)
- という特徴を付加した問題を考察し、時間大域可解性と非線形相互作用の関係性を定量的な形で明らかにする。加えて、時間大域解が構成できた際にその性質(時間大域的な挙動や正則性)にも興味がある。また、この研究を通して新たな調和解析学的手法の開発やその他の方程式にも適用できる理論の構築を行う。

3. 研究の方法

(1) 空間次元が3次元以下の十分小さい初期値を持つ連立非線形消散型波動方程式に対して、先述の(西原や細野-小川)によって構成された線形解の分解を用いて非線形相互作用を小さく評価する方法論を示した。

(2) 高階空間拡散項を含む方程式(非線形消散型梁方程式、加速度項付き Cahn-Hilliard 方程式、弱い摩擦項付き三次元等温 Falk-Konopka モデル)に対して、第一段階として線形化問題の解の、消散項の効果を示す時間減衰評価の構成や熱核に代表される自己相似解による漸近形の同定の証明を行った。また、Fourier multiplier の理論に併せて停留位相法を用いることで高階方程式特有の平滑化効果が得られた。この線形化問題に対する考察を各非線形問題の非線形項に応じて適用した。

(3) 国内外の研究集会やセミナーに参加し、発表と聴講のみならず、参加研究者との意見交換・討論を通して幅広く最新の研究成果の

情報収集を行った。また、「偏微分方程式レクチャーシリーズ in 福岡工業大学」を運営し、研究者を招聘してこれまでの研究成果と最新の研究成果の体系的な情報収集を行った。

4. 研究成果

上述の研究目的に基づき、主に連立系や高階化に関して以下の研究成果が得られた。

(1) 非線形消散型波動方程式の連立系の時間大域解の挙動が熱核によって近似できるための十分条件を非線形項の増大度の観点から導出した。すなわち、空間次元が3次元以下の場合には、非線形項のべきの和が藤田指数よりも大きければ小さい初期値に対して時間大域解が構成できて、さらにその(連立系の)解はすべての成分が熱核で近似できることを示した(雑誌論文[8])。

(2) 非線形消散型梁方程式に対して、線形評価に基づいて小さい初期値に対する時間大域解の存在を証明した。併せて、時間減衰評価の構成と漸近形の同定を行い、時間減衰評価の減衰率に関する最適性を示した。また、非線形解の正則性と初期値の正則性の関係の一部を明らかにした(雑誌論文[4],[5])。

さらに非線形項の符号を限定して方程式から導かれるエネルギーが非負定値になる場合には初期値の大きさに依らずにエネルギークラスにおいて時間大域適切性と同時にエネルギー減衰を示した(雑誌論文[2])。初期値の空間遠方での減衰が遅い(可積分とは限らない)場合にも、斉次ソボレフ空間を用いて時間大域解の構成と時間減衰評価・解の漸近形の導出を行った(雑誌論文[1])。

(3) 雑誌論文[4],[5]の結果を応用して、加速度項付き Cahn-Hilliard 方程式や弱い摩擦項付き三次元等温 Falk-Konopka モデルの時間大域解の構成とその時間減衰評価の証明、初期値の空間減衰と非線形項の増大度に応じた解の漸近挙動を明らかにした(雑誌論文[6],[3])。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計9件)

[1] H. Takeda, *Higher-order expansion of solutions for a damped wave equation*, *Asymptot. Anal.* に掲載決定, 査読有り。

[2] H. Takeda, *Large time behavior of global solutions of the semilinear damped beam equation with slowly decaying data*,

J. Math. Anal. Appl. 423 (2015), no. 2, 898-912, DOI:10.1016/j.jmaa.2014.10.032, 査読有り.

[3] H. Takeda and S. Yoshikawa, *On the decay property of solutions to the Cauchy problem of the semilinear beam equation with weak damping for large initial data*, Adv. Stud. Pure Math. 64 (2014), 507-514, 査読有り.

[4] H. Takeda and S. Yoshikawa, *Asymptotic profiles of solutions for the isothermal Falk-Konopka system of shape memory alloys with weak damping*. Asymptot. Anal. 82 (2013), no.3-4, 331-372, 査読有り.

[5] H. Takeda and S. Yoshikawa, *On the initial value problem of the semilinear beam equation with weak damping I: Smoothing effect*. J. Math. Anal. Appl. 401 (2013), no. 1, 244-258, DOI:10.1016/j.jmaa.2012.12.015, 査読有り.

[6] H. Takeda and S. Yoshikawa, *On the initial value problem of the semilinear beam equation with weak damping II: Asymptotic profiles*. J. Differential Equations 253 (2012), no.11, 3061-3080, DOI:10.1016/j.jde.2012.07.014, 査読有り.

[7] H. Takeda and S. Yoshikawa, *Asymptotic profile of solutions for the limit unstable Cahn-Hilliard equation with inertial term*. Differential Integral Equations 25 (2012), no.3-4, 341-362, 査読有り.

[8] H. Takeda, *Global existence of solutions for higher order nonlinear damped wave equations*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2011, Dynamical systems, differential equations and applications. 8th AIMS Conference. Suppl. Vol. II, 1358-1367, 査読有り.

[9] T. Ogawa and H. Takeda, *Large time behavior of solutions for a system of nonlinear damped wave equations*.

J. Differential Equations 251 (2011), no.11, 3090-3113, DOI:10.1016/j.jde.2011.07.034, 査読有り.

〔学会発表〕(計 14 件)

[1] 竹田 寛志, 非線形膜方程式の解の大域挙動について, 日本数学会年会, 明治大学, 2015年3月23日.

[2] 竹田 寛志, 弱い消散項を持つ非線形膜方程式の時間大域適切性と解の拡散現象, 熊本応用解析セミナー, 熊本大学, 2015年2月7日.

[3] 竹田 寛志, *Unconditional global well-posedness for a nonlinear damped plate equation and diffusion phenomena of the solution*, 第32回広大サステナブル科学セミナー偏微分方程式勉強会@広島大学, 広島大学, 2015年2月2日.

[4] H., Takeda, *Unconditional global well-posedness for a nonlinear damped plate equation*, International Conference on Recent Advances in Hyperbolic Partial Differential Equations, 広島国際会議場, 2014年12月6日.

[5] 竹田 寛志, 弱い消散項を持つ非線形膜方程式の解の大域挙動について, 南大阪応用数学セミナー, 大阪府立大学, 2014年11月22日.

[6] 竹田 寛志, 非線形消散型梁方程式の解の挙動, 佐賀微分方程式セミナー, 佐賀大学, 2014年10月22日.

[7] H., Takeda, *Global existence and asymptotic behavior of solutions to the nonlinear plate equation with weak damping*, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madrid,

Spain, 2014年7月10日.

[8] 竹田 寛志, *Large time behavior of solutions to the wave equations with structural damping*, 解析セミナー, 九州大学, 2014年5月1日

[9] 竹田 寛志, *Asymptotic behavior of solutions for some dissipative hyperbolic equations*, 解析セミナー, 九州大学, 2014年4月21日

[10] H.Takeda, *Large time behavior of global solutions of the semilinear damped beam equation with slowly decaying data*, Applied Math/PDE Seminar, University of California, Santa Barbara, USA, 2014年3月21日.

[11] 竹田 寛志, 非線形消散型梁方程式の時間大域解の挙動について, 第3回室蘭非線形解析研究会, 室蘭工業大学, 2013年11月1日

[12] H.Takeda, *Higher order expansion of solutions to damped wave equations*, The 9th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Orlando, Florida, USA, 2012年7月4日.

[13] 竹田 寛志, 非線形消散型波動方程式の解の漸近形について, 愛媛大学解析セミナー, 愛媛大学, 2012年6月9日.

[14] 竹田 寛志, 非線形消散型波動方程式の解の高次漸近展開について, 九州関数方程式セミナー, 福岡大学セミナーハウス, 2012年4月13日.

[15] 竹田 寛志, *Large time behavior of the solutions for the semilinear beam equation with weak damping*, 微分方程式の総合的研究, 東京大学, 2011年12月18日.

[16] 竹田 寛志, *Large time behavior of the solutions for the semilinear damped beam equation*, 第7回非線形の諸問題, 熊本大学, 2011年9月23日.

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.fit.ac.jp/research/search/profile/id/164>

6. 研究組織
(1) 研究代表者
竹田 寛志 (Takeda Hiroshi)
福岡工業大学・工学部・准教授
研究者番号: 23740116