様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号：１１１０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４０１１７

研究課題名（和文）移流拡散方程式の解の時間大域挙動について

研究課題名（英文）Large-time behavior of solutions to the drift-diffusion equation

研究代表者
山本　征法（Masakazu, Yamamoto）

弘前大学・理工学研究科・助教

研究者番号：００６０００６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、半導体素子のシミュレーションモデルに由来する移流拡散方程式の初期値問題について、解の時間大域挙動を与える漸近展開を導出した。半導体素子内部の荷電粒子は自らの形成する静電場の移流効果を受けながら熱力学的な効果により拡散する。特にその拡散経路は半導体に添加された不純物の原子上に限られるため、拡散は跳躍的である。本研究では跳躍する粒子の拡散を記述する上で妥当な分数冪の拡散を与えた方程式を考察し、その解の挙動が拡散の強弱によって大きく異なることを証明した。

研究成果の概要（英文）：In this plan, we developed the asymptotic expansion of solutions to the drift-diffusion equation which is described from the model of a semiconductor. Since an electron on a semiconductor may jump from a dopant into another, the dissipation of them is written by the fractional Laplacian. We proved that the asymptotic expansion

研究分野：数学

キーワード：関数方程式　関数解析　実解析　応用数学

１．研究開始当初の背景

半導体デバイスのシミュレーションモデルとして、移流拡散方程式と呼ばれる半線形拡散方程式とポアソン方程式との連立系が知られている。移流拡散方程式の解は半導体デバイス内の電荷の密度の質量保存則から導かれるものであり、その導出背景から自然な結論として、電荷の総質量、すなわち解の空間積分が時間によらず一定であることが知られている。本研究計画では、移流拡散方程式の解の時刻無限大での漸近展開を導出した。解の漸近展開は、全体として一定量の電荷の質量分布が時間とともに変化する様子を明示する。一般に拡散現象を記述する際に導入される最も初等的な作用素はラプラシアンであるが、本研究ではより一般的な分数冪ラプラシアンによって拡散を与えた方程式についても考察した。なお、分数冪ラプラシアンは確率過程における跳躍過程に対応する作用素であり、半導体デバイス内の荷電粒子のように跳躍しながら移動する粒子の拡散を記述する上で妥当な作用素である。

非線形の拡散現象を記述する方程式の解の時間大域挙動については、多くの問題について本研究計画以前から盛んに研究が行われている。解の時刻無限大での漸近展開を導入するには、解のモーメントの評価が不可欠であるため、まずは解の時間遠方および空間遠方での減衰の速さを把握する必要がある。特に解の高階の漸近展開を得るためには、解の高次のモーメントの評価が必要であるため、減衰が遅い解の漸近近似には精度の限界があると考えられてきた。この問題点が顕著な例として、非圧縮性粘性流体の速度場を記述する Navier-Stokes 方程式が挙げられる。Navier-Stokes 方程式については、その解の空間遠方での減衰を初期値の選び方によって制御できないため、漸近展開の次数の限度は宿命的であると考えられる。同様に分数冪ラプラシアンなどの特異拡散を含む拡散方程式についても、解の空間遠方での減衰が遅いために、解の漸近展開の展開次数には限界があると考えられてきた。

２．研究の目的

本研究では、自然現象や社会現象における非線形の拡散を記述する方程式を考察した。その中でも特に、半導体デバイスのモデル方程式である移流拡散方程式の初期値問題について、解の時間大域挙動を漸近展開によって明示することが本計画の目的であった。

移流拡散方程式において、拡散を分数冪ラプラシアンで与えた場合、拡散のフーリエ表象の特異性に起因して、解の空間遠方での減衰が遅くなる。解の漸近展開には係数として解のモーメントが現れるため、高階の展開を導出する際に解の空間遠方での減衰の遅さが問題となる。本研究計画では、漸近展開を導出する際に繰り込みと呼ばれる手法を用いて、この難点を取り除くことを目標とした。

また、分数冪ラプラシアンによる拡散において、作用素の冪を小さくとった場合、解に対する拡散項由来の正則化効果が弱くなることが予想される。そのため、拡散の冪が小さな場合の移流拡散方程式については、その可解性、特に時間大域解の存在と一意性について従来未解決であった。一方、拡散の冪にかかわらず、移流拡散方程式にはスケール保存の構造があるが、冪が小さい場合にはそのスケールに関してノルムを保存する空間をルベーグ空間の枠組みで構成することが不可能である。同様の問題が移流拡散方程式に類似の準地衡近似方程式の研究においても知られており、スケール保存の空間の構造が大きく変わる境目は臨界と呼ばれている。本研究では、拡散の冪が小さい臨界および超臨界の場合にスケール保存則を有する補間空間を導入し、その空間において、解の時間大域挙動研究の前提である時間大域解の存在を示すことを目指した。

３．研究の方法

本研究計画の主要テーマである移流拡散方程式の解の時間大域挙動については、特に分数冪の方程式の解を漸近展開する際に、見かけ上発散する積分が現れることが問題であった。本研究では、この積分の発散を解消するために「繰り込み」と呼ばれる手法を用いた。先行研究においても、発散する時間積分の処理に繰り込みを利用した例が存在する。しかし、分数冪拡散方程式に関しては、解の漸近展開を導入する際に時間積分・空間積分ともに発散する項が現れる。このため、従来の繰り込みでは分数冪の拡散方程式を取り扱うことは困難であった。本研究では、時空変数に関する重み付きのルベーグ空間における解の評価を用いることにより、繰り込み法が時間積分と空間積分双方の発散を同時に解消することを示した。これにより、分数冪ラプラシアンの移流拡散方程式の解に関して、従来は導出が困難であること考えられてきた高階の漸近展開について考察し、解の時間大域挙動について最適な評価を得た。

以上は移流拡散方程式のうち、分数冪拡散の階数が比較的高い劣臨界の場合の研究手法である。拡散の冪が低い臨界や超臨界の場合は、非線形項の発散が線形の拡散より見かけ上強く働くため、通常の摂動法による解の評価が困難となる。本研究計画では、交換子の評価を応用し、非線形項由来の発散をポテンシャル項に吸収させることによりこの問題点を解消した。

４．研究成果

本研究計画における最初の成果は、拡散の冪が大きい劣臨界の移流拡散方程式の解の滑らかさに関するものである。この場合は、解の微分を摂動法により評価することが可能であり、これにより解の空間変数に関する

解析性を結論できる。この成果については下記欄 5.雑誌論文(7)で発表済みである。
次に本計画では、移流拡散方程式のうち特に、半導体素子内部における不純物の分布のばらつきを考慮したモデルについて、九州大学の川島秀一教授と共同で研究を行った。半導体は絶縁体に電気的な特性の異なる不純物を添加して製造されるが、その不純物の分布のばらつきはポテンシャル項を決定する方程式の非斉次項を用いて表現される。この場合、移流拡散方程式は時間定常解を持つが、本研究では、この漸近安定性を示した(雑誌論文(6))。
本計画の主要テーマである移流拡散方程式の解の時間大域挙動については、拡散の冪が大きい劣臨界型の方程式の解に対して、繰り込みにより従来よりも高階の漸近展開を得た(雑誌論文(5))。
移流拡散方程式をはじめとした半線形の拡散方程式について研究する際には、ポテンシャル項付きの線形方程式に対する研究手法が有効である場合が多い。本研究計画においても、分数冪ラプラシアンで拡散を与えたポテンシャル項付き線形拡散方程式の解の漸近展開について考えた。その結果、解の時空遠方での減衰に着目した繰り込みにより、従来困難と考えられてきた任意の階数の漸近展開が導出可能であることが分かった。この成果は雑誌論文(4)にて発表した。さらに、移流拡散方程式を含む半線形の分数冪拡散方程式の枠組みにおいても、同様に解の任意階の漸近展開を導出できることを証明した(雑誌論文(1))。
拡散の冪が小さい場合の移流拡散方程式の初期値問題については、その可解性について、未解決な部分が多かった。本研究計画では、東京理科大学の加藤圭一教授・杉山裕介助教と共同で、臨界・超臨界の場合の移流拡散方程式の可解性について研究を行った。まず、重み付きルベーグ空間における可解性については雑誌論文(3)で、スケール保存則を備えた補間空間における時間大域可解性については雑誌論文(2)で発表した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　7 件）すべて査読あり

(1) Yamamoto, M., Asymptotic expansion of solutions to the nonlinear dissipative equation with the anomalous diffusion, ***J. Math. Anal. Appl.***, **427** (2015), 1027-1069.

(2) Sugiyama, Y., Yamamoto, M., Kato, K., Local and global solvability and blow up for the drift-diffusion equation with the fractional dissipation with the critical space, ***J. Differential Equations***, **258** (2015), 2983-3010.

(3) Yamamoto, M., Kato, K., Sugiyama, Y., Existence and analyticity of solutions to the drift-diffusion equation with critical dissipation, ***Hiroshima Math. J.***, **44** (2014), 275-313.

(4) Yamamoto, M., Asymptotic expansion of solutions to the dissipative equation with fractional Laplacian, ***SIAM J. Math. Anal.***, **44** (2012), 3786-3805.

(5) Yamamoto, M., Large-time behavior of solutions to the drift-diffusion equation with fractional dissipation, ***Differential Integral Equations***, **25** (2012), 731-758.

(6) Kobayashi, R., Yamamoto, M., Kawashima, S., Asymptotic stability of stationary solutions to the drift-diffusion model in the whole space, ***ESAIM Control Optim. Calc. Var.***, **18** (2012), 1097-1121.

(7) Yamamoto, M., Spatial analyticity of solutions to the drift-diffusion equation with generalized dissipation, Arch. Math. (Basel), **97** (2011), 261-270.

〔学会発表〕（計　13 件）いずれも査読なし

(1) 山本征法, 臨界型移流拡散方程式の解の時間大域挙動について, 常微分方程式ワークショップ 松山 2015, 愛媛大学, 2015 年 3 月 10 日.

(2) 山本征法，拡散の冪が小さい移流拡散方程式の解の時間大域挙動について，第 25 回 数理物理と微分方程式，四季の湯強羅静雲荘，2014 年 11 月 1-3 日.

(3) 山本征法，Asymptotic behavior of solutions to the drift-diffusion equation of elliptic type，抽象発展方程式理論から見た偏微分方程式に関する評価方法の再考，数理解析研究所，2014 年 10 月 24 日.

(4) 山本征法，臨界拡散を持つ移流拡散方程式の解の漸近挙動について，第 4 回 室蘭非線形解析研究会，室蘭工業大学，2014 年 10 月 17-19 日.

(5) 山本征法，臨界拡散を持つ移流拡散方程式の解の挙動について，日本数学会 2014 年度秋季総合分科会，広島大学，2014 年 9 月 28 日.

(6) 山本征法，Asymptotic profile of solutions to the drift-diffusion equation with critical dissipation，第 127 回 神楽坂解析セミナー，東京理科大学，2014 年 9 月 6 日.

(7) 山本征法，分数冪拡散を持つ拡散方程式の解の挙動について，第 24 回 数理物理と微分方程式，ロマントピア，2013 年 11 月 3 日．

(8) 山本征法，特異拡散を持つ移流拡散方程式の解の挙動について，日本数学会 2013 年度秋季総合分科会，愛媛大学，2013 年 9 月 26 日．

(9) 山本征法，異常拡散項をもつ線形拡散方程式の解の挙動について，第 23 回 数理物理と微分方程式，国民宿舎野呂高原ロッジ，2012 年 11 月 5 日．

(10) 山本征法，分数冪ラプラシアンの拡散方程式の解の挙動について，日本数学会 2012 年度秋季総合分科会，九州大学，2012 年 9 月 20 日．

(11) 山本征法，移流拡散方程式の解の漸近形の特殊な場合について，愛媛大学談話会，愛媛大学数学教室，2012 年 1 月 27 日．

(12) 山本征法，拡散効果を一般化した移流拡散方程式の解の漸近挙動について，日本数学会 2011 年度秋季総合分科会，信州大学，2011 年 9 月 30 日．

(13) 山本征法，非局所的な拡散効果をもつ移流拡散方程式の解の時間大域挙動について，NLPDE セミナー，京都大学大学院理学研究科，2011 年 7 月 8 日．

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0 件）

○取得状況（計　0 件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
山本 征法（MASAKAZU YAMAMOTO）
弘前大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：00600066