

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 4 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740119

研究課題名(和文)量子KZ方程式の解空間の解析と可積分系への応用

研究課題名(英文) Analysis of the solution space for the quantum KZ equation and its applications to integrable systems

研究代表者

竹山 美宏 (Takeyama, Yoshihiro)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：60375392

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円、(間接経費) 840,000円

研究成果の概要(和文)：量子 KZ 方程式の研究の可積分系への応用に関して、以下の 2つの結果を得た。第一に、多重ゼータ値の q 類似を含む広いクラスの多重和について、その積構造を記述する代数的な枠組みを構成した。そして、複シャッフル関係式と呼ばれる線形関係式を定式化し証明した。第二に、デルタ関数型の斥力相互作用をもつ 1次元ボゾン系のハミルトニアンを離散化を定義し、アフィンhecke代数の表現を用いて固有関数を構成した。

研究成果の概要(英文)：We get two results about related problems to the quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation. First, we constructed an algebra which describes the multiplication structure of a family of q -series containing a q -analogue of multiple zeta values. A family of linear relations called the double shuffle relations is formulated and proved in our framework. Second, we defined a discrete analogue of the Hamiltonian of the non-ideal Bose gas with delta-potentials, and constructed eigenfunctions by means of the Bethe ansatz method making use of a representation of the affine Hecke algebra.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系

1. 研究開始当初の背景

(1) 量子 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式 (以下、量子 KZ 方程式)は、可解格子模型 (およびそれと等価な 1 次元可解スピン鎖)の相関関数や、可積分場の理論における形状因子などの重要な物理量が満たす差分方程式系である。数学的には、量子アフィン代数の最高ウェイト表現に対する頂点作用素の行列要素が満たすべき方程式として得られる。その可解性はアフィンヘッケ代数の表現論の枠組みで捉えることができ、トレース写像と呼ばれる対称化の操作によって、Macdonald 型差分作用素が得られることも知られている。このように、量子 KZ 方程式は数学的にも興味深い対象である。

(2) 量子 KZ 方程式に関連する特殊関数論の話題として、多重ゼータ値の q 類似が満たす関係式の研究がある。量子 KZ 方程式は差分方程式であるが、差分間隔をゼロにする極限をとることで、共形場理論に現れる KZ 方程式が得られる。KZ 方程式はリー代数の普遍包絡環の元を含むが、これを一般の非可換な元とした方程式を考える。この一般化された KZ 方程式の解のモノドロミーは、多重ゼータ値を使って記述でき、モノドロミーの性質から多重ゼータ値の関係式が得られる。ここで多重ゼータ値とは、リーマンゼータ関数の特殊値を多重和に拡張したものである。上記のことから、多重ゼータ値の関係式は、KZ 方程式の解空間の構造と密接な関係がある。この関係を q 類似の場合に拡張することは、自然な問題であろう。

2. 研究の目的

本研究では、可積分場の模型に対応する量子 KZ 方程式の解空間の構造を調べる。量子 KZ 方程式の一般解は、多重積分を用いて構成される。このような解の構成法は大きく二つのタイプに分類される。ひとつは、頂点作用素や Zamolodchikov-Faddeev 代数のボゾン表示を用いる方法である。もうひとつは、Tarasov-Varchenko による超幾何型の多重積分を用いる方法である。本研究では、可積分場の模型に対応する量子 KZ 方程式の一般解を後者の方法で構成し、これを使って解空間の構造を調べる。

さらに、多変数の特殊関数とそれに関連する代数の表現論を使って、量子 KZ 方程式の特殊解を組織的に構成する方法についても考察する。以前の研究において、GL 型の量子アフィン代数のベクトル表現に対応する場合に、アフィンヘッケ代数の表現論を用いて多項式解を構成した。この結果を本研究で考察する場合の量子 KZ 方程式に対して拡張する。また、関連する特殊関数論や表現論などへの応用も視野に入れて研究を進める。

3. 研究の方法

(1) 境界つき sine-Gordon 模型における形状因子が満たす量子 KZ 方程式について考察した。境界付きの XXZ 模型に対しては、その相関関数の積分表示が既に構成されていた (桑野)。そこで、この結果を sine-Gordon 模型の場合に拡張することを試みた。

(2) 多重ゼータ値の q 類似は金子・黒川・若山および Zhao によって定義されている。多重ゼータ値の関係式のうち、特殊関数論の手法で証明されるものについては、 q 類似の場合にも拡張できることが、これまでの研究で分かっている。そこで、この方針に沿った考察をさらに進め、多重ゼータ値の q 類似がもつ代数的構造を調べた。

(3) 本研究の可積分系への応用のひとつとして、デルタ関数型の斥力相互作用をもつ 1 次元ボゾン系の離散化について考察した。

デルタ関数型の相互作用をもつボゾン系のハミルトニアンに対する固有値問題は、周期境界条件の下で Lieb と Liniger がベテ仮設法によって解決した。この問題は、デルタ関数の台が一般のアフィンワイル群の鏡映面にある場合に拡張されており、その代数的構造は二重アフィンヘッケ代数で記述できる (Emsiz, Opdam, Stokman)。さらに、ベテ仮設法を使ってハミルトニアンの固有関数を構成する問題は、楕円型の量子 KZ 方程式の退化と関係することが、Hartwig, Stokman により指摘されている。

以上の結果の離散化について、アフィンヘッケ代数の表現論の観点から考察した。

4. 研究成果

(1) 境界つき sine-Gordon 模型に対応する量子 KZ 方程式の一般解の構成およびその構造の研究については、満足できる結果が得られなかった。これまでの研究結果を踏まえると、一般解の多重積分表示は、解をパラメトライズする多変数のローラン多項式を含むことが期待される。しかし、本研究で考察した場合においては、解をパラメトライズするローラン多項式全体のなす空間を正確に把握することが難しかった。この点については今後の課題としたい。

(2) 多重ゼータ値の q 類似については、まず、それが制限和公式と呼ばれる線形関係式を満たすことを証明した。多重ゼータ値の制限和公式は Eie, Liaw, Ong によって得られたが、これを q 類似の場合に拡張したことになる。

制限和公式の証明では、多重ゼータ値を含む広いクラスの (q つきの)多重和がもつ代数的構造を利用した。そこで、この考察をさらに進め、多重ゼータ値の q 類似が満たす関係式を組織的に記述するための、代数的な枠組みを構成した。以下でその詳細を述べる。

多重ゼータ値の線形関係式は、2変数の非可換多項式環上に定義される2種類の積構造(調和積と積分シャッフル積)を使って記述できる。多重ゼータ値の調和積は、多重和の積における変数の入れ換えの操作を代数的に定式化したものである。積分シャッフル積は、多重ゼータ値の反復積分表示において、積分領域の書き換えの操作を記述したものである。これらを q 類似の場合に拡張する。調和積の q 類似は容易に定義できる。しかし、積分シャッフル積の拡張は、それほど容易ではない。なぜなら、既に Zhao によって指摘されていたように、積分シャッフル積が多重ゼータ値の q 類似だけでは閉じないためである。そこで、より広いクラスの (q つきの)多重和を考える必要がある。本研究では、制限和公式の q 類似の証明に用いたクラスが、積分シャッフル積で閉じることを証明し、さらにその積構造を簡明に記述することに成功した。

多重ゼータ値の q 類似に対して2種類の積を定義できたことにより、これらを使って多重ゼータ値の q 類似の線形関係式を組織的に構成できる(複シャッフル関係式)。しかし、この方法でもすべての線形関係式は得られないことが計算機による実験で分かる。そこで、これを補充するために必要な別の線形関係式を証明し、複シャッフル関係式と合わせれば多重ゼータ値の q 類似の線形関係式を尽くすことを、次数の低い場合に計算機で確かめた。

本研究で考察した多重和のクラスは、Ohno, Okuda, Zudilin が考察した q 類似、および Bachmann, Kuhn の q 類似をも含む。特に後者は、多重アイゼンシュタイン級数のフーリエ展開に現れるものであり、本研究の結果を整数論へ応用する糸口となり得るのではないかと考えている。

(3) デルタ関数型の斥力相互作用をもつ1次元ボゾン系の離散化については、以下の結果が得られた。

近年、可積分な確率過程の研究が広く行われている。確率モデルの研究では、何らかの量の漸近挙動を調べることが重要な問題である。この量が、極限をとる前の(有限の)段階において閉じた形で書き下せ、そこから漸近挙動を完全に計算できる場合に、その確率過程は可積分であると言われる。

可積分な確率過程のひとつである O'Connell-Yor モデルの多点モーメント関数は、デルタ関数型の相互作用をもつボゾン系のハミルトニアンを離散化した差分作用素の固有関数となっている。本研究では、2つのパラメータを持つ離散的なハミルトニアンで、特別な場合として O'Connell-Yor モデルを含むものを構成した。さらに、このモデルに対して propagation operator と呼ばれる作用素を構成した。この作用素は、離散ラブラシアン固有関数を我々のハミ

ルトニアンに対する固有関数に移す写像である。

propagation operator を定義するためには、離散的な積分作用素が必要となる。この作用素は、多項式環に作用する差分作用素の双対として得られる。我々の構成で用いる差分作用素は、ヘッケ代数の表現論で使われる Demazure-Lustzig 作用素を一般化したものである。このことから、上記の離散的な積分作用素はヘッケ代数の表現を与えることが分かる。さらに、関数の独立変数をずらすシフト作用素を合わせて考えると、全体としてアフィンヘッケ代数の表現を与える。したがって、本研究で構成したハミルトニアンに対する固有値問題は、アフィンヘッケ代数の表現を用いて解けたことになる。以上の結果により、ペーテ仮設法によって得られる固有関数の代数的な構造も明確に理解できた。

デルタ関数型の相互作用をもつボゾン系の離散化は、Macdonald 球関数との関連から van Diejen によって既に研究されていたが、本研究では異なる観点から離散化を構成し考察したことになる。可積分な確率過程とアフィンヘッケ代数の表現論との関係については、まだ十分な研究がなされておらず、今後もこの観点からの研究を進める予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

1 Yoshihiro Takeyama, A discrete analogue of periodic delta Bose gas and affine Hecke algebra, *FUNKCIALAJ EKVACIOJ*, 査読有, 57 (2014), 107-118.

<http://www.math.sci.kobe-u.ac.jp/~fe/xml/fe57-1-5.xml>

2 Yoshihiro Takeyama, The Algebra of a q -Analogue of Multiple Harmonic Series, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), 査読有, 9 (2013), 15 pages.

DOI: 10.3842/SIGMA.2013.061

3 Yoshihiro Takeyama, A restricted sum formula for a q -analogue of multiple zeta values, *Symmetries, Integrable Systems and Representations (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics)*, 査読有, 40 (2013), 561-573.

DOI: 10.1007/978-1-4471-4863-0_24

4 Yoshihiro Takeyama, Quadratic relations for a q -analogue of multiple zeta values, *Ramanujan Journal*, 査読有, 27 (2012), 15-28.

DOI: 10.1007/s11139-011-9328-8

[学会発表](計4件)

1 竹山美宏, A discrete analogue of periodic delta Bose gas and affine Hecke algebra, 日本数学会年会, 2014年3月17日, 学習院大学.

2 竹山美宏, A discrete analogue of periodic delta Bose gas and affine Hecke algebra, JSPS-NWO Seminar: Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces, 2013年8月27日, 名古屋大学.

3 竹山美宏, A generalization of duality for finite multiple harmonic sum, Infinite Analysis: Past, Present and Future, 2013年3月6日, 京都大学.

4 竹山美宏, On relations for a q-analogue of multiple zeta values, Infinite Analysis 11 - Frontier of Integrability -, 2011年7月28日, 東京大学.

〔図書〕(計 0 件)

なし

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

なし

取得状況(計 0 件)

なし

〔その他〕

なし

6. 研究組織

(1)研究代表者

竹山 美宏 (TAKEYAMA YOSHIHIRO)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：60375392

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし