

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成25年 5月 1日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2011～2012

課題番号：23740120

研究課題名（和文）量子系の完全な正作用素値測度の構成

研究課題名（英文）Structure of informationally complete positive operator valued measures on quantum systems

研究代表者

大野 博道（OHNO HIROMICHI）

信州大学・工学部・准教授

研究者番号：90554585

研究成果の概要（和文）：正作用素値測度とは、量子を観測する際に必要な観測装置と考えてよい。ある正作用素値測度により、量子のもつ全ての情報を知ることができるとき、その正作用素値測度は完全であると言われるが、一般に、もっとも効率的に量子の情報を知ることができる特別な完全な正作用素値測度が存在するかどうかは分かっていない。今回の研究では、いくつかの完全な正作用素値測度の例と、特別な完全な正作用素値測度が存在しない例の構成に成功した。

研究成果の概要（英文）：A positive operator valued measure (POVM) is a measurement in the quantum information theory. An informationally complete POVM allows one to estimate the expectation value of any arbitrary operator. In the present study, we construct some examples of informationally complete POVMs and we show that there exists an operator space which does not have a good informationally complete POVM.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	1, 100, 000	330, 000	1, 430, 000

研究分野：数物系化学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：作用素環、量子系、量子情報理論

1. 研究開始当初の背景

量子とは、物質の最小単位を表すものであり、例として電子や光子などが挙げられる。量子系とは、この量子を数学的に表す枠組みであり、具体的にはヒルベルト空間上の有界線型作用素のなす環で表されている。特にヒルベルト空間が有限次元であるときには、量子系は行列環で表されている。この量子系上の量子状態を観測するための手段として用いられるのが正作用素値測度である。特に、量子状態を完全に知ることができる完全な正作用素値測度として、MUBとSIC-POVMがあり、これまでこの2つの完全な正作用素値測

度の研究が多く行われてきた。

MUBはヒルベルト空間の正規直交基底の集合で、異なる基底に属するベクトルの内積の絶対値が特定の値をとるものことである。ヒルベルト空間の次元 d に対し、MUBの基底の個数が $d+1$ 個であるとき、そのMUBから完全な正作用素値測度を構成できることが知られている。MUBの研究は1980年代に多く行われており、ヒルベルト空間の次元 d が素数のべき乗の場合には、 $d+1$ 個の基底を持つMUBが存在することが知られている。一方で、ヒルベルト空間の次元 d が素数のべき乗でない場合の、MUBの基底の最大個数については未解決であるが、予想ではその個数は $d+1$ 個に

満たず、MUB から作られる完全な正作用素値測度が存在しないとされている。

ヒルベルト空間の次元が素数のべき乗でない場合には、MUB から作られる完全な正作用素値測度が存在しないという予想を受けて、MUB とは異なる方法で完全な正作用素値測度を構成する方法が考えられた。それが 2000 年ごろから研究されている SIC-POVM である。SIC-POVM は d 次元ヒルベルト空間における d^2 個のベクトルの集合で、どの 2 つのベクトルの内積の絶対値も同じ値をとるものである。SIC-POVM は現在までにヒルベルト空間の次元が 15 次元以下の場合には存在することが知られており、またコンピュータによる解析で、60 次元程度までは存在すると予想されている。そのため、全ての次元において SIC-POVM が存在することが期待されているが、SIC-POVM の存在は証明されていない。

完全な正作用素値測度の研究は、量子情報分野への応用が数多く期待されている。例えば、量子情報の分野において量子状態を観測するために完全な正作用素値測度が用いられるが、MUB や SIC-POVM により構成される完全な正作用素値測度は、必要な観測回数が少なく、さらに観測時に生じる誤差に最も強いことが知られている。それ以外にも、量子暗号の分野などへの応用が考えられている。

一方で、この研究は数学の他の分野とも繋がりが深い。例えば、ベクトルの内積という点に注目すれば、frame 理論に結び付き、ベクトルの幾何的な構造に注目すれば design 理論に結びつく。また、ベクトルから構成される射影作用素や、ベクトルを写すユニタリ作用素を考えれば、作用素論・作用素環論との繋がりもある。このように量子情報の分野だけでなく、数学的にも非常に意義のある研究である。

2. 研究の目的

完全な正作用素値測度として、もっともよい性質を持つといわれているのが SIC-POVM である。そのため、最終的な目標はこの存在を証明することである。しかし本研究では、SIC-POVM のみを研究するのではなく、SIC-POVM や MUB を含む、全ての完全な正作用素値測度について解析する。その上で、SIC-POVM や MUB に代わる新しい完全な正作用素値測度を構成する。

この新しい完全な正作用素値測度に求められる条件は、

- (1) 全ての次元のヒルベルト空間で存在し

ていること。

- (2) SIC-POVM や MUB がもつ、誤差に強いなどのよい性質を持つこと。

- (3) 完全な正作用素値測度を構成するためのベクトルの数が出来る限り少ないこと。

の 3 つである。まず、SIC-POVM や MUB の存在が証明されていない次元のヒルベルト空間に存在することが必要である。次に、観測をより正確にするための誤差への強さやなど、量子情報への応用するために必要ないくつかの条件を満たす必要がある。最後に、それらを満たすものの中で、なるべくベクトルの数を少なくする必要がある。ここで、これらの条件を満たすベクトルの集合で、ベクトルの数が一番少なくなったものが SIC-POVM であり、この研究は、SIC-POVM の存在をこれまでの研究とは別の観点から解析しているものでもある。

また、現在の SIC-POVM の研究は、あるユニタリ部分群の特定のユニタリ作用素の固有ベクトルを解析することが中心になっている。本研究においても、このユニタリ部分群や、その固有ベクトル、さらにユニタリ部分群から作られる条件付き期待値やその像である部分環の解析を行う。

これまでの研究では、MUB や SIC-POVM の存在に関する研究が中心的に行われてきている。そのため、MUB や SIC-POVM の存在が証明されていないヒルベルト空間においては、標準的な正作用素値測度というものがない。本研究により得られる結果は、そのようなヒルベルト空間にも、完全な正作用素値測度を与えるものになる。それにより、量子情報の分野への応用が数多く期待できる。例えば、新しい完全な正作用素値測度は、state tomography と呼ばれる、量子状態の観測に用いる具体的な観測方法を与えることができる。また量子暗号分野において、秘密鍵を送信する際にもっとも盗聴に強い通信方法を与えることにもなる。

3. 研究の方法

SIC-POVM の研究は、あるベクトルを Generalized Pauli group と呼ばれるユニタリ部分群で写しベクトルの集合を作り、そのベクトルの集合が SIC-POVM になるような、もとのベクトルを見つけることが目的となっている (Appleby, J. Math. Phys. 46, 2005 など)。現在はもとのベクトルの候補としてクリフォード群と呼ばれるユニタリ部分群の元で、位数が 3 のユニタリ作用素の固有ベクトルが挙げられている (Zauner,

Dissertation, Universität Wien, 1999).
しかし、全ての固有ベクトルから作られるベクトルの集合が SIC-POVM になるわけではなく、結局はコンピュータによって条件を満たすようなベクトルを求めるという手法が用いられている。そのため低次元のヒルベルト空間においては存在が確認されても、一般のヒルベルト空間に拡張することはできていない。本研究では、まずこの候補となっているクリフォード群のユニタリ作用素とその固有ベクトルの解析を行う。特に、固有ベクトルから作られるベクトルの集合が SIC-POVM になるようなベクトルの条件について調べる。また、これを調べる上で、クリフォード群の部分群から作られる条件付き期待値についての研究も行う。これは、この条件付き期待値と Generalized Pauli group から作られる条件付き期待値の像の共通部分である部分環の形から、取るべき固有ベクトルの条件が導かれることが予想されるからである。

さらに、これらの研究をもとに、新しい完全な正作用素値測度の構成を行う。同様の研究として、Roy, Scott らによって基底の集合から作られる完全な正作用素値測度の研究があるが (J. Math. Phys. 48, 2007), この研究では使われる基底の個数が膨大な数になってしまっているため、より少ないベクトルで作られる完全な正作用素値測度を作ることが必要である。本研究では、Generalized Pauli group の部分群、クリフォード群の部分群、その固有ベクトルの最適な取り方を、それぞれの解析結果から予測し、なるべく少ないベクトルから作られる完全な正作用素値測度の構成を行う。

さらに、構成された新しい完全な正作用素値測度の解析を行う。具体的には、MUB や SIC-POVM がもっていた、観測時の誤差に強いという性質や、秘密鍵を送信するときに最も盗聴に強い性質などを同様に持つかどうかを確かめる。秘密鍵の送信についてはこの強さを表す数値があり (Fuchs, Quant. Info. Comp. 4, 2004), これらの数値が MUB や SIC-POVM と同じ値をとるか、また同じ値をとらない場合にはどのような条件を付加すればよいか、研究を行う。さらに観測時の誤差など、他の性質についても、それらの性質の強さを数値化する研究を行い、同様の解析を行う。

4. 研究成果

本研究では、条件付き SIC-POVM と呼ばれ

る完全な正作用素値測度を、いくつかの空間において構成することに成功し、また、それとは逆に、条件付き SIC-POVM が存在しない空間の例があることを示すことができた。

条件付き SIC-POVM とは、量子状態の情報の一部がわかっているという前提のもとで、その量子状態の全ての情報をもっとも効率よく得られるという正作用素値測度であり、2011 年に Petz によって初めて導入された概念である。数学的には、行列環の部分環の正作用素値測度で、ある良い条件を満たしているものである。部分環が行列環であるとしたとき、この条件は、正作用素値測度が SIC-POVM であるための条件と全く同じものであるため、条件付き SIC-POVM は SIC-POVM の一般化であると考えられている。さらに、これまで研究されてきた MUB や SIC-POVM は、ヒルベルト空間上の行列環の中の正作用素値測度であったのに対して、条件付き SIC-POVM はそれを部分環の場合にまで拡張させている。

条件付き SIC-POVM も SIC-POVM 同様、その構成は簡単ではなく、しかも部分環の条件により、その難しさが変わってくる。本研究では、いくつかの特別な部分環に条件付き SIC-POVM が存在することを証明した。また、それとは逆に条件付き SIC-POVM が存在しない例を構成することもできた。

これまで行われている研究では、存在証明は具体例をつくることで証明されており、今回も同様に、実際に具体例を構成することで、条件付き SIC-POVM の存在を証明した。一方で、存在しないことを証明するのはかなり難しく、これまでに「正作用素値測度やそれに準ずるものが存在しない」という証明はほとんど存在していない。さらに、その数少ない証明方法も、次元が 2 などの非常に簡単なケースで、条件式から導かれる連立方程式を解くと解がない、という方法で示されている。このような証明方法は一般化しづらく、次元が 3 や 4 など、少し大きくなっただけでも、同様の証明をすることが不可能になってしまう。

本研究では、これまでの証明法とは異なる、新しい証明法で条件付き SIC-POVM の非存在を証明している。上記の方法とは違い、この証明方法は次元が高いものであっても、比較的簡単に適応させることができ、実際に任意の次元で条件付き SIC-POVM が存在しない例をつくることが出来た。上記のように、このような証明法はこれまでにあまり知られておらず、今後この証明法をさらに発展させた研究も期待できる。また、条件付き SIC-POVM についても、その存在や非存在については未解決な部分もあり、今後の研究が期待されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

Hironichi Ohno, Entanglement of marginal tracial states, Banach and Function spaces IV, 2013, in press. 査読有.

[学会発表] (計6件)

- ① 大野博道, 条件付きSIC-POVM, RIMS研究集会「量子化と作用素論」, 2013. 2. 4-6, 京都大学
- ② Hironichi Ohno, POVMs on quantum systems, Quantum Information Theory and Its Applications, 2012. 12. 13-15, 立命館大学.
- ③ 大野博道, Complementary subalgebras in matrix algebras, RIMS研究集会「関数解析学による一般化エントロピーの新展開」, 2012. 11. 12-14, 京都大学
- ④ Hironichi Ohno, Entanglement of marginal tracial states, The Forth International Symposium on Banach and Function Spaces 2012, 2012. 9. 12-15, 九州工業大学
- ⑤ Hironichi Ohno, Entanglement of marginal tracial states, Workshop on operator theory and operator algebras in Sendai, 2012. 3. 14-15, 東北大学
- ⑥ 大野博道, 量子情報理論入門, 立命館大学解析セミナー, 2011. 11. 17-18. 立命館大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大野 博道 (OHNO HIROMICHI)

信州大学・工学部・准教授

研究者番号 : 90554585