

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 13 日現在

機関番号：14303

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740122

研究課題名(和文)リーマン多様体上のデルタ型磁場を持つシュレディンガー作用素の解析

研究課題名(英文) Analysis on Schroedinger operators with delta-like magnetic fields on Riemannian manifolds

研究代表者

峯 拓矢 (Mine, Takuya)

京都工芸繊維大学・工学科学研究科・准教授

研究者番号：90378597

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円、(間接経費) 780,000円

研究成果の概要(和文)：アハラノフ・ボーム効果は古典電磁気学において便宜的に導入されたベクトル・ポテンシャルが量子力学的散乱振幅に観測可能な量子効果として現れる現象である。本研究課題ではアハラノフ・ボーム型磁場(磁場)がリーマン多様体上のシュレディンガー作用素のスペクトルにどのような影響を及ぼすかについての研究を行った。双曲平面の場合には周期格子上に配置されたアハラノフ・ボーム型磁場を考え、定数磁場中でランダウ準位が存在するための十分条件(磁束密度に対する閾値)を与えた。ユークリッド平面上の2点に磁束がある場合には、磁束の量子化条件の下で Mathieu 関数を用いて固有関数の厳密な表示を与えた。

研究成果の概要(英文)：The Aharonov-Bohm effect is known as an observable quantum effect by the magnetic vector potential, which is introduced in the classical electrodynamics only as a computational tool. In this subject, we study the effect of the Aharonov-Bohm magnetic fields (delta-like magnetic fields) on the spectrum of the Schroedinger operators on Riemannian manifolds. Especially, we consider the Schroedinger operators on the hyperbolic plane with a constant magnetic field plus the Aharonov-Bohm magnetic fields placed periodically on a hyperbolic lattice, and study the threshold value of the magnetic fluxes for the existence of the infinitely degenerated Landau levels. Moreover, we consider the Schroedinger operators on the Euclidean plane with two quantized Aharonov-Bohm magnetic fields, and give an explicit form of the eigenfunctions in terms of the Mathieu functions.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：数理物理 関数方程式 関数解析学 シュレディンガー方程式 アハラノフ・ボーム効果 量子力学

1. 研究開始当初の背景

ユークリッド平面上の型磁場(アハラノフ・ボーム型磁場)を持つシュレディンガー作用素は1959年にAharonov-Bohmにより考察された。彼らはユークリッド平面の原点に関数の磁束を持つ磁場を考え、磁場の位置には粒子が侵入できない(ディリクレ条件)の下で散乱振幅を計算し、磁束に触れないはずの粒子が磁束による干渉効果を受けて散乱振幅が変化することを示した。彼らの結果は「ベクトル・ポテンシャルは便宜上のもので磁場のみが物理的な実在である」という従来 of 物理学者の信仰を覆すものであり、発表以来多くの物理学者による議論の対象となった。その数学的研究は、被覆空間・被覆変換群とその表現に付随するラプラシアン of 観点から微分幾何学者(砂田利一等)が、散乱理論 of 観点から偏微分方程式 of 研究者(田村英男等)が行ってきた。

一方、ユークリッド平面上でのパウリ作用素のZero-Mode(固有値0に対する固有関数)の空間次元はAharonov-Casherの公式で与えられ、超対称性との関連から盛んに研究されている。特に定数磁場中においてはパウリ作用素のZero-Modeは無限多重度を持つが、この事実はパウリ作用素の対角項に現れるシュレディンガー作用素の最低ランダウ準位が無限多重度を持つことと同値となる。さらに、定数磁場に周期的に配置された磁場による摂動を加えた場合にも、磁場の位置での境界条件および磁束の値にある条件を課せば同様の事実が成り立つことが2004年にGeyler-Stovicekにより示され、その一般化が2006年にRozenblum-Shirokovにより示された。さらに、2006年にGeyler-Stovicekは上記のZero-Modeに関する結果を双曲平面上に周期的に磁場が配置された場合に拡張した。

また、外村彰によるアハラノフ・ボーム効果の検証実験では超伝導体のトーラス内部に閉じ込められた磁場による電子波の干渉パターン of 観測を行ったが、この系をトーラスに対して垂直な平面で切ると、平面上の2ヶ所に閉じ込められた磁場を得る。この系に関する2011年度の研究代表者による研究において、1988年にGu-Qianがユークリッド平面上に2つの磁場がある場合 of 散乱振幅 of 厳密な表示を計算していたことが再発見された。彼らの結果は数学的厳密性にやや不備があったため、彼らの結果を厳密に定式化することが喫緊の課題となっていた。

2. 研究の目的

(1)2006年のGeyler-Stovicekによる双曲平面上のパウリ作用素のZero-Modeに関する結果 of 精密化・一般化を行う。上に述べた通り、この問題はシュレディンガー作用素の最低ランダウ準位の重複度 of 問題と同値である。周期的磁場に定数磁場を付け加えた場合、シュレディンガー作用素は一般には複

数個 of ランダウ準位を持つが、この場合に(最低準位と限らない)ランダウ準位が無限多重度となるような磁束の値および磁場の位置における境界条件に関する必要条件・十分条件を与える。

(2)上記のGu-Qianによる結果、すなわちユークリッド平面上の2点に型磁場がある場合 of シュレディンガー作用素 of 固有関数・散乱振幅 of 表示を数学的に厳密な形で定式化し、その数値計算についての研究を行う。

3. 研究の方法

(1)双曲平面上の周期格子とは、双曲上半平面に作用する群 $SL(2, \mathbb{R})$ of 離散部分群 G による点 of 軌道の有限和のことである。ここで、「群 G に対応する保型関数で格子の各点で1位の零点を持つものが存在する」と仮定する。このとき、定数磁場に周期格子上の磁場を付け加えたシュレディンガー作用素 of 最低ランダウ準位に対する固有関数を上記 of 保型関数を用いて書き下し、遠方での漸近挙動を調べることができる。さらにRiemann-Roch of 定理を用いれば、上記 of 仮定を満たすための群 G に関する十分条件は与えることができる。固有関数が得られれば、磁束の値と固有関数 of 漸近挙動との関連を調べることにより、最低ランダウ準位が無限多重度になるための磁束に関する条件を与えることができる。さらに、一般 of ランダウ準位に対する固有関数は最低ランダウ準位 of 固有関数に昇作用素を施すことにより得られるため、同様の議論を行うことにより準位が無限多重度になるための十分条件を与えることができる。

(2)Gu-Qianの方法は、楕円座標を用いてシュレディンガー作用素を変数分離し、固有関数をMathieu関数という特殊関数を用いて書き下すものである。しかし、彼らの結果では楕円座標 of 切れ目における整合条件を十分に吟味しておらず、この点を調べる必要がある。これは、幾何学的には楕円座標に対応する被覆変換群 of $U(1)$ 表現を考えることと等価である。整合条件が成り立つとき、まずは楕円領域における問題を考え、多母数スペクトル解析を用いて固有関数 of 完全性を示す。さらに全平面 of 問題の場合、散乱振幅を計算するためには楕円座標によるフーリエ変換を用いる必要があるが、これにはMcLachlanによる平面波 of Mathieu展開を用いればよい。

4. 研究成果

(1)双曲平面上 of 定数磁場に周期的磁場を付け加えたシュレディンガー作用素に対して、周期格子に対するある種の幾何学的な仮定の下で、最低ランダウ準位が無限多重度になるための必要十分条件を与えた。得られた結果は2006年のGeyler-Stovicekの結果を精密化したものであった(彼らの結果は粗

い十分条件のみ)。さらに、一般のランダウ準位が無限多重度となるための十分条件を与えた。結果は論文リスト5-3において出版した。

(2) ユークリッド平面上の2点に磁場があり、磁束の値が量子化されている(磁束量子の整数倍になる)場合に、Gu-Qian が与えた固有関数は整合条件を満たすことを示した。さらに、その作用素を2点を焦点とする楕円上で考えてディリクレ境界条件で自己共役実現した場合に、Mathieu 関数で書き下された固有関数全体が完全系になることを示した。さらに、この作用素は楕円座標に対応する被覆変換群の $U(1)$ 表現に付随するラプラシアンとも見なせるが、非可換ゲージである $U(2)$ 表現に付随するラプラシアンの固有関数も Mathieu 関数で書き下され、完全系をなすことも示した。以上の結果は論文リスト5-1において出版した。また、散乱振幅に対する結果は現在整理して論文にまとめており、2014年度中に投稿予定である。

(3) 派生的な結果として、2次元ユークリッド平面において周期的スカラーポテンシャルを持つシュレディンガー作用素に対する Bethe-Sommerfeld 予想、すなわちスペクトルギャップが有限個になるという予想に対する精密化を行った。結果は論文リスト5-2において出版した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

1. Takuya Mine, Solvable models in two-solenoidal Aharonov-Bohm magnetic fields on the Euclidean plane, in Spectral and Scattering theory and Related Topics (ed. F. Hiroshima), 数理解析研究所講究録別冊 B45 (2014), 45-68, 査読有.

2. Masahiro Kaminaga and Takuya Mine, Upper Bound for the Bethe-Sommerfeld Threshold and the Spectrum of the Poisson Random Hamiltonian in Two Dimensions, Annales Henri Poincare 14 (2013), no. 1, 37-62, 査読有.

3. Takuya Mine and Yuji Nomura, Landau levels on the hyperbolic plane in the presence of Aharonov-Bohm fields, Journal of Functional Analysis 263 (2012), no. 6, 1701-1743, 査読有.

[学会発表](計6件)

1.
発表者: 峯 拓矢
標題: 楕円座標を用いた散乱振幅の計算
学会名: 日本数学会 2014 年度年会
場所: 学習院大学目白キャンパス

発表年月日: 2014 年 3 月 15 日

2.
発表者: Takuya MINE
標題: Two-solenoidal Aharonov-Bohm effect with quantized magnetic fluxes
学会名: QMATH12 Mathematical Results in Quantum Mechanics
場所: Humboldt University of Berlin
発表年月日: 2013 年 9 月 11 日

3.
発表者: Takuya MINE
標題: Two-solenoidal Aharonov-Bohm effect with quantized magnetic fluxes
学会名: The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013
場所: 札幌コンベンションセンター
発表年月日: 2013 年 7 月 2 日

4.
発表者: Takuya MINE
標題: Upper bound for the Bethe-Sommerfeld threshold in two-dimensions
学会名: International Congress on Mathematical Physics 2012
場所: Aalborg Congress and Culture Center
発表年月日: 2012 年 8 月 4 日

5.
発表者: Takuya MINE
標題: Explicit eigenfunctions for the Schroedinger operators with two-solenoidal Aharonov-Bohm fields
学会名: Analytic and algebraic methods in physics X
場所: Villa Lanna (Prague, Czech republic)
発表年月日: 2012 年 6 月 7 日

6.
発表者: 峯 拓矢
標題: Explicit solutions for the Schroedinger equations with Aharonov-Bohm magnetic fields
学会名: スペクトル散乱理論とその周辺
場所: 京都大学理学部
発表年月日: 2011 年 12 月 16 日

[その他]
ホームページ等
京都工芸繊維大学研究者総覧データベースシステム
<http://www.research-db.jim.kit.ac.jp/kitdb/servlet/RefOutController?exeBO=WR41000B0&monitorID=WR41000>

6. 研究組織
(1) 研究代表者
峯 拓矢 (MINE, Takuya)
京都工芸繊維大学 工芸科学研究科

准教授

研究者番号：90378597