

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 24 日現在

機関番号：22604

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740123

研究課題名(和文) 特異ラグランジュ部分多様体のフレアー理論におけるモジュライの解析と代数構造の研究

研究課題名(英文) Moduli spaces for Floer theory of singular Lagrangian submanifolds

研究代表者

赤穂 まなぶ (AKAHO, Manabu)

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号：30332935

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題の目標は特異点を持つラグランジュ部分多様体のフレアー理論の構成である。まずはじめにそのトイモデルである境界付き多様体上の勾配ベクトル場が境界に沿うモース関数についてのモースホモロジーを考察し、その成果としてライプニッツ則を満たす交叉積を構成することに成功した。しかし本来の目的であったフレアー理論の構成にはまだ乗り越えるべき困難が多く存在し、それらを解決することが今後の課題である。一方、完全ラグランジュはめ込みのフレアー理論に関してはその応用として置換エネルギーと擬正則円盤のシンプレクティック面積の間のある不等式を得ることに成功し、またその周辺に関していくつかの予想を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to construct Floer theory for singular Lagrangian submanifolds. To begin with, the researcher considered Morse functions on manifolds with boundary whose gradient vector fields are tangent to the boundary. Then he defined Morse complex for such Morse functions and succeeded in getting intersection products, which satisfies the Leibniz rules. But there are still many difficulties to construct Floer theory for singular Lagrangian submanifolds, and we would expect more future works. On the other hand, the researcher proved an inequality of symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions as an application of Floer homology for Lagrangian immersions, and moreover, we obtain some new conjectures.

研究分野：ラグランジュ部分多様体のフレアー理論

キーワード：シンプレクティック幾何 ラグランジュ部分多様体 フレアー理論

1. 研究開始当初の背景

(1) 滑らかなラグランジュ部分多様体のフレアー理論は既に多くの研究結果が得られていたが、一方特異点を持つラグランジュ部分多様体はホモロジー的ミラー対称性やアティア・フレアー予想などに自然に現れ応用上も重要であるにも関わらず、それらのフレアー理論はほとんど手つかずのまま研究されていなかった。

(2) もっとも単純でかつ重要な特異点を持つラグランジュ部分多様体の例としてラグランジュはめ込みが挙げられる。ラグランジュはめ込みのフレアー理論の研究にはじめて組織的に取り組んだのは本研究代表者による[1][2]であり、他には Chekanov およびその周辺の研究者らによるルジャンドル部分多様体の接触ホモロジーの研究がある。

(3) ラグランジュはめ込みより複雑な特異点を持つラグランジュ部分多様体のフレアー理論の構築が期待されていた。

(4) 一方、Eliashberg--Givental--Hofer らにより凹型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体における擬正則曲線の理論が提唱されており(いわゆるシンプレクティック場の理論[3]他)、これは Chekanov の接触ホモロジーとも密接に関わっている。

(5) また滑らかなラグランジュ部分多様体のフレアー理論は Fuyaka--Oh--Ohta--Ono らの一連の研究([4]他)により完全な解答が出されており、擬正則円盤のモジュライ空間から A 無限大代数のホモトピー論が代数構造として現れる。

引用文献

- [1] M. Akaho, Intersection theory for Lagrangian immersions, Math. Res. Lett. 12 (2005), no.4, 543-550.
- [2] M. Akaho and D. Joyce, Immersed Lagrangian Floer theory, J. Differential Geom. 86 (2010), No. 3, 381-500.
- [3] Y. Eliashberg, A. Givental and H. Hofer, Introduction to symplectic field theory, GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999), Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 560--673.
- [4] K. Fukaya, Y. -G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction I, II. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 46.1, 2.

2. 研究の目的

(1) 特異点を持つラグランジュ部分多様体のフレアー理論の構成。これは将来的な目標

であり、現時点ではかなり漠然としている。

(2) その準備として凹型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体とそのルジャンドルエンドを持つラグランジュ部分多様体のフレアー理論を研究する。これは特異点の補集合を想定している。具体的にはその場合の擬正則曲線のモジュライ空間の構成と、そこから得られる代数的な構造の解明。

(3) さらにそのトイモデルとして境界付き多様体上で勾配ベクトル場が境界に接するようなモース関数のモースホモロジーおよび交叉積の構成。そしてさらに高次の積構造(モースホモトピー)の構成へ。

(4) 凹型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体の中のルジャンドルエンドを持つラグランジュ部分多様体のフレアー理論とラグランジュはめ込みのフレアー理論の比較・関連を調べる。

(5) ラグランジュはめ込みのフレアー理論の応用を模索する。

3. 研究の方法

(1) 凹型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体における擬正則曲線の振る舞いもしくはモジュライ空間のコンパクト化と、境界付き多様体上の勾配ベクトル場が境界に接するモース関数の勾配曲線のモジュライ空間のコンパクト化の類似点を観察し、そこから何らかの代数構造を導き出す。基本的には閉シンプレクティック多様体におけるラグランジュ部分多様体のフレアー理論の拡張になるようにバブルが起きないという強い仮定の下で A 無限大代数の導出を目指す。

(2) Fukaya による閉多様体のモースホモトピーを参考に上記境界付き多様体上のモース関数についてモースホモロジーおよび交叉積、そしてさらに高次の積構造を模索する。またその際に境界に住んでいるサイクルの交叉を横断的にするための摂動方法を開発する。

(3) ラグランジュはめ込みのフレアー理論の応用として、Chekanov によるラグランジュ部分多様体の置換エネルギーに関する研究を精査し、それをラグランジュはめ込みに拡張することを試みる。またそこから得られる不等式の等号が成立する例を見つけ出し、理論の妥当性を確立する。

4. 研究成果

(1) 境界付き多様体において勾配ベクトル

場が境界に接するモース関数によるハンドル分解が得られた ([1])。そしてそのハンドル分解から定義されるモースホモロジーが absolute な特異ホモロジーと同型になることが示された。

(2) 上記境界付き多様体のモース複体上に交叉積を構成し、その交叉積がライプニッツ則を満たすことを確認した。特に境界におけるサイクルの交叉を横断的にするための摂動を代数的に処理する方法を開発した。これは凹型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体におけるルジャンドルエンドを持つラグランジュ部分多様体のフレアー理論でも活用出来ると期待される ([2])。

(3) しかしその一方で交叉積の記述は組み合わせ的に非常に複雑になることが判明し、さらに高次の積構造を記述する場合には何らかの他の方法が必要になることが予想され今後の課題である。

(4) ラグランジュはめ込みのフレアー理論の応用として完全ラグランジュはめ込みの置換エネルギーに関するある不等式が得られた ([3])。具体的には完全ラグランジュはめ込みの置換エネルギーが、1 点でのみ不連続な境界値の持ち上げを持つ擬正則円盤のシンプレクティック面積の下限で下から評価できるというものである。またここで得られた不等式の等号が成立する例を探したが見つからず、その結果新たな予想 (不等式) を立てるに至り今後の研究課題である。

[1] M. Akaho, Morse homology of manifolds with boundary revisited, preprint (2014), arXiv:1408.1474

[2] M. Akaho, Cup products on Morse homology of manifolds with boundary, preprint (2011)

[3] M. Akaho, Symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions, preprint (2015), arXiv:1505.06560

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 0 件)

〔学会発表〕(計 12 件)

(1) 赤穂まなぶ, Symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions, Geometry and related topics セミナー, 京都大学 数理解析研究所 (京都府), 2014 年 11 月 18 日

(2) 赤穂まなぶ, Symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions,

幾何コロキウム, 東京大学 (東京都), 2014 年 11 月 14 日

(3) Manabu Akaho, On intersection products on Morse homology of manifolds with boundary, NCTS (South) Geometry Conference Mathematics New GOals, National Cheng Kung University, 2014 年 6 月 30 日-7 月 4 日

(4) Manabu Akaho, On Morse homology of manifolds with boundary, Floer and Novikov homology, contact topology and related topics, Kavli IPMU (千葉県), 2014 年 4 月 21 日-24 日

(5) 赤穂まなぶ, Morse theory of manifolds with boundary, ミラー対称性に関する小さな研究会, 千葉大学 (千葉県), 2013 年 2 月 13 日-15 日

(6) Manabu Akaho, Morse theory of manifolds with boundary, UK-Japan Mathematical Forum, 慶応大学 (神奈川県), 2013 年 1 月 25 日-28 日

(7) 赤穂まなぶ, 境界付き多様体のモース理論, 幾何学セミナー, 九州大学 (福岡県), 2012 年 12 月 7 日

(8) 赤穂まなぶ, 境界付き多様体のモースホモロジーとフレアー理論, 鹿児島大学 談話会, 鹿児島大学 (鹿児島大学), 2012 年 7 月 6 日

(9) 赤穂まなぶ, 境界付き多様体のモースホモロジーにおけるカップ積の構成, 信州トポロジーセミナー, 信州大学 (長野県), 2012 年 5 月 30 日

(10) 赤穂まなぶ, 境界付き多様体のモースホモロジー I, II, ホモロジー的ミラー対称性の SYZ 的アプローチ, 千葉大学 (千葉県), 2012 年 3 月 21 日-23 日

(11) 赤穂まなぶ, 境界付き多様体のモース理論, 部分多様体幾何とリー群作用 2011, 東京理科大学 (東京都), 2011 年 9 月 2 日 3 日

(12) 赤穂まなぶ, 境界付き多様体のモース理論, 香川セミナー, 香川大学 (香川県), 2011 年 7 月 2 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況 (計 0 件)

名称:

発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.comp.tmu.ac.jp/pseudoholomorphic/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

赤穂 まなぶ (AKAHO, Manabu)
首都大学東京・理工学研究科・准教授
研究者番号：30332935

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：