

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 14 日現在

機関番号：12401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2015

課題番号：23740124

研究課題名(和文) 変分法による非線形楕円型方程式の摂動問題の研究

研究課題名(英文) The study on perturbation problem for the nonlinear elliptic partial differential equation by variational method

研究代表者

佐藤 洋平 (SATO, Yohei)

埼玉大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：00465387

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では連立非線形シュレディンガー方程式の解構造の研究を摂動問題の観点から変分法を用いて行った。2つの方程式から成る連立非線形シュレディンガー方程式においては、半正値解と呼ばれる解の多重存在を示した。n本の方程式から成る連立非線形シュレディンガー方程式に対しては、相互作用の項の係数がすべて負のとき、指定した成分関数は丁度1回符号変化し、それ以外の成分関数は正であるような半正値解の存在を証明した。3本の方程式から成る連立シュレディンガー方程式においては、二つの相互作用の項の係数が負で、ひとつの相互作用の項の係数が正のとき、エネルギー最小正値解の存在を示した。また、正値解の多重存在も示した。

研究成果の概要(英文)：This research is concerned with perturbation problem for the nonlinear elliptic partial differential systems with variational structure. I showed the multiple existence of semi-positive solutions for the nonlinear Schrodinger systems which consists of two equations. I also showed the existence of semi-solutions for the nonlinear Schrodinger systems which consists of n equations. That semi-positive solution changes sign exactly once for any chosen components and that is positive for the other components. Moreover, I also studied the nonlinear Schrodinger systems which consists of three equations. In particular, I consider the case where the coefficient of two coupling terms are negative and the coefficient of one coupling term is positive. Then I showed existence of a least energy positive solution and the shape of the solution. Moreover, I showed the multiple existence of positive solutions.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：変分法 摂動法 非線形楕円型偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形シュレディンガー方程式の定在波解を記述する非線形楕円型偏微分方程式の研究では、プランク定数に対応する係数をパラメータとして極限に近づけると、ポテンシャル関数の臨界点の近くにピークをもつような解が存在することが知られている。このピーク解に関しては次のことが分かっている。

ある点の近くにピークをもつ解が存在するとしたら、それはポテンシャル関数の臨界点でなければならない。

もしマルチピーク解が存在すれば、その解の形状は各臨界点の周りではシングルピーク解に近い形状をしている。

そこで、逆にポテンシャル関数の指定された1つあるいは複数の臨界点の近くにピークをもつような解が構成できるか、という問題は摂動問題の基本的な問になっている。この問題は、マルチピーク解に着目すると、指定されたシングルピーク解を繋ぐようなマルチピーク解は構成できるか、と言い換えることもできる。このような解の研究は Floer, Weinstein, Oh らによって始められ、Byeon, del Pino, Felmer, Rabinowitz, Wang など多くの研究者によって研究されている。従来の研究では、マルチピーク解を構成する場合、各ピークの形状が同種のものを持つ場合が多かった。

(2) 私のこれまでの研究の特徴の一つは、各ピークの形状が本質的に異なるようなマルチピーク解を構成しているところにあった。私と田中和永教授の論文(2009)では、ポテンシャル関数が二つの井戸をもつような形をしている状況を仮定し、二つの井戸の底にピークをもつようなマルチピーク解を構成する構成問題を扱った。この方程式では、パラメータを極限に近づけたときに、それぞれの井戸の底において、よく知られた極限方程式の解に近づくことが Bartsh-Wang(2010)によって考察されている。特に、この極限方程式は可算無限個の非自明解をもつことが知られている。そこで、我々は与えられた極限方程式の解のペアに対して、その解のペアに近づくようなマルチピーク解は構成できるかという構成問題を考え、部分的な答えを得た。部分的な答えとは、一方の井戸では対応する極限方程式のエネルギー最小解に近づき、他方の井戸では対応する極限方程式のエネルギーの大きな解に近づく解を構成したことである。また空間1次元のときには、極限方程式の任意の解のペアを繋ぐ、マルチピーク解を構成できることを示した。

2. 研究の目的

(1) 本研究の目的は、上記の私と田中和永教

授の論文の状況の下で、両方の井戸において対応する極限方程式のエネルギーの大きな解に近づく解を構成することである。

(2) 上記のマルチピーク解の構成法を考える手段として、連立方程式の摂動問題の研究を行う。なぜ連立方程式の摂動問題を研究するかというと、マルチピーク解の構成問題と連立方程式の摂動問題を扱うときに対象となる汎関数の変分構造には類似性があり、摂動問題としては連立方程式の摂動問題の方が自然な問題とみることができるからである。

3. 研究の方法

(1) マルチピーク解の構成問題の摂動問題としての取り扱い方を整理すると次のようになる。

マルチピーク解の各ピークはそれぞれ対応する極限方程式の解に近づいていく。

したがって、もとの方程式(汎関数)は互いに独立した極限方程式(極限汎関数)からの摂動だとみなすことによってマルチピーク解を構成する。

このとき、汎関数に人工的な修正を加えることで極限汎関数からの摂動とみなし易くなるが、この人工的な修正のため、摂動の効果が複雑になってしまう。

(2) 一方、連立非線形シュレディンガー方程式では相互作用の項の係数をパラメータと考えた摂動問題を考えると、現れる極限汎関数の間では対称性の崩れが起こらない。また、汎関数に人工的な修正をすることなく自然に極限汎関数からの摂動とみることができるため、より自然な摂動問題になっている。したがって、まずは連立楕円型方程式の摂動問題の解析を行う方が、摂動によって変分構造が不変になるための条件や理由の見通しがよくなるのではないかと考えられる。そのため、まずは、連立楕円型方程式の摂動問題を研究する。

4. 研究成果

(1) 変分構造をもつ連立非線形シュレディンガー方程式の相互作用の項の係数をパラメータとみた摂動問題の研究を行い、以下の結果を得た。以下の結果は査読付きの4つの国際研究雑誌に掲載された。

2つの方程式から成る連立非線形シュレディンガー方程式の半正値解と呼ばれる解(一方の成分関数が正で、もう一方の成分関数が符号変化するような解)の多重存在について研究し、相互作用の項の係数が負のとき、少なくとも可算無限個の半正値解が存在することを示した。また、

相互作用の項の係数が正で 0 に近づくにつれて、あるいは、無限大に発散するにつれて、半正値解の個数が増えていくことを示した。

n 本の方程式から成る連立非線形シュレディンガー方程式について研究し、相互作用の項の係数が負のとき、指定した成分関数は丁度 1 回符号変化し、それ以外の成分関数は正であるような半正値解の存在を証明した。また、その解は対応する符号変化の中で最小のエネルギーをもつ解であることを示した。

3 本の方程式から成る連立シュレディンガー方程式において、二つの相互作用の項の係数が負で、ひとつの相互作用の項の係数が正のとき、正の係数が十分大きければ、少なくともひとつ正値解が存在することを示した。また、そのときの解の形状についても詳細に解析した。この結果は、相互作用の項の係数に正の数と負の数が混じっているときの解の存在とその形状を最初に調べた結果である。

得た解は、たとえ方程式が定義された領域が球であったとしても、球対称関数にならないことに着目し、(3)と同じような状況の下で、領域が球の場合に正値解の多重存在を示した。空間次元が 2 の場合、与えられた自然数 k に対して、パラメータを十分極限に近づければ、 k 個の正値解が存在することを示した。空間次元が 3 の場合、少なくとも 6 個の正値解が存在することを示した。

(2) 研究期間中にふたつの国際研究集会やワークショップでの講演依頼を受け、本研究の研究成果に関する講演を行った。ひとつは 2014 年に韓国で開催された国際数学会議(ICM)のサテライト研究集会、もうひとつは 2015 年に大阪大学で開催された第三回チリ・ジャパンワークショップである。またそれ以外にも 14 件の学会、研究集会、ワークショップ等において講演を行った。

(3) 本研究による研究成果の一部が認められ、2013 年に大阪市立大学数学会特別賞を受賞した。

<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/math/OCAM1/news/jyusyoyo.html>

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

Yohei Sato, Zhi-Qiang Wang, Multiple positive solutions for Schrödinger systems with mixed couplings, *Calculus*

of Variations and Partial Differential Equations, 54 no.2, 1373-1392, 2015, 査読有

DOI: 10.1007/s00526-015-0828-z

Yohei Sato, Zhi-Qiang Wang, The least energy positive solution for the nonlinear elliptic three-systems with attractive and repulsive interaction terms, *Advanced Nonlinear Studies*, 15, 1-22, 2015, 査読有

DOI: 10.1515/ans-2015-0101

Yohei Sato, Zhi-Qiang Wang, On the least energy sign-changing solutions for a nonlinear elliptic system, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, 35 no. 5, 2151-2164, 2015, 査読有

DOI: 10.3934/dcds.2015.35.2151

Yohei Sato, Masataka Shibata, Existence of a positive solution for nonlinear Schrödinger equations with general nonlinearity, *Advanced Nonlinear Analysis*, 3 (S1), s55-s67, 2014, 査読有

DOI: 10.1515/anona-2014-0003

Yohei Sato, The least energy positive solution for the nonlinear elliptic three-systems with attractive and repulsive interaction terms, *京都大学数理解析研究所講義録 No.1896*, 2014, 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1896.html>

Yohei Sato, Zhi-Qiang Wang, On the multiple existence of semi-positive solutions for a nonlinear Schrödinger system, *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse non linéaire*, 30 No. 1, 1-22, 2013, 査読有

DOI: 10.1016/j.anihpc.2012.05.002

[学会発表](計 16 件)

佐藤洋平, 連立楕円型方程式の符号変化する解のエネルギー最小解について, 第 10 回非線形偏微分方程式と変分問題, 2016 年 2 月 7 日, 首都大学東京(東京都・八王子市)

佐藤洋平, The positive solutions for the nonlinear Schrödinger systems with mixed couplings, 3rd Chile-Japan Workshop on Nonlinear PDEs, 2015 年 12 月 8 日, 大阪大学(大阪府・豊中市)

佐藤洋平, 引力的・斥力的な項を含むシュレディンガー方程式系の解の存在と形状について, 第 25 回南大阪応用数学セミナー, 2015 年 5 月 16 日, 大阪市立大学(大阪府・大阪市)

佐藤洋平, 柴田将敬, Remark on Nehari type condition for a least energy solution of semi-linear elliptic

equations, 日本数学会年会, 2015 年 3 月 21 日, 明治大学 (東京都・千代田区)

佐藤洋平, 引力的・斥力的な項を含む連立シュレディンガー方程式のエネルギー最小界の形状について, 第 9 回非線形偏微分方程式と変分問題, 2015 年 2 月 9 日, 首都大学東京 (東京都・八王子市)

佐藤洋平, 連立シュレディンガー方程式の正值解の多重存在, Workshop on analysis in Kagurazaka 2015, 2015 年 1 月 23 日, 東京理科大学 (東京都・新宿区)

佐藤洋平, The least energy sing-changing solutions for the nonlinear Schrödinger systems, Workshop on Nonlinear Analysis and Nonlinear Elliptic PDEs, 2014 年 8 月 9 日, KAIST, 韓国

佐藤洋平, The positive solutions for the nonlinear Schrödinger systems with mixed couplings, Seoul ICM 2014 Satellite Conference on Variational Methods for Nonlinear Elliptic PDEs, 2014 年 8 月 4 日, KAIST, 韓国

佐藤洋平, 符号の異なる相互作用項をもつ連立非線形シュレディンガー方程式の正值解の存在について, さいたま数理解析セミナー, 2014 年 7 月 23 日, 埼玉大学サテライトキャンパス (埼玉県・さいたま市)

佐藤洋平, 非線形シュレディンガー方程式系の変分解析による研究, 頭脳循環数物合同研究集会, 2014 年 3 月 31 日, 大阪市立大学 (大阪府・大阪市)

佐藤洋平, 非線形シュレディンガー方程式系の変分解析的研究, 大阪市立大学数学会特別賞受賞講演, 2014 年 1 月 31 日, 大阪市立大学 (大阪府・大阪市)

佐藤洋平, Least energy solutions for nonlinear Schrödinger systems with mixed attractive and repulsive couplings, 研究集会「微分方程式の総合的研究」2013 年 12 月 22 日, 東京大学駒場キャンパス (東京都・目黒区)

佐藤洋平, Least energy solutions for nonlinear Schrödinger systems with mixed attractive and repulsive couplings, 偏微分方程式の解の幾何, 2013 年 11 月 22 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府・京都市)

佐藤洋平, 柴田将敬, The existence of a positive solution to semilinear elliptic equations with periodic potential, 日本数学会, 2013 年 9 月 26 日, 愛媛大学 (愛媛県・松山市)

佐藤洋平, The multiple existence of semi-positive solutions for a nonlinear Schrödinger system, 第 6 回非線型偏微分方程式と変分問題, 2012 年 2 月 12 日, 首都大学東京 (東京都・八王子市)

佐藤洋平, 連立非線形楕円型方程式の半正值解の多重存在について, 第 4 回福島楕円型・放物型微分方程式研究集会, 2012 年 1 月 28 日, 福島大学 (福島県・福島市)

〔その他〕

ホームページ等

<http://s-read.saitama-u.ac.jp/researchers/pages/researcher/TKYSylw>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤 洋平 (SATO Yohei)

埼玉大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：00465387