様式Ｆ－１９

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成２５年 ５月 ２８日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2011 ～ 2012
課題番号：23740129
研究課題名（和文） 空間非一様な外力の影響下における反応拡散方程式系の爆発解の冪行列による分類
研究課題名（英文） Classification by the matrix representing the nonlinearity of the blowing up solutions for a reaction-diffusion system
研究代表者
山内 雄介（YAMAUCHI YUSUKE）
早稲田大学・重点領域研究機構・研究員
研究者番号：00451435

研究成果の概要（和文）：反応拡散方程式系の解の爆発メカニズムの本質的理解を目標とし、３連立反応拡散方程式系の爆発臨界指数、及び、単独方程式の爆発時刻について数学的研究を行った。その際には、それぞれの方程式の有する非線型性を代数的に捉えた正方行列「冪行列」による解析を新たに試みた。これにより、本数の多い連立方程式に対する煩雑な爆発解析を簡潔に書き表すことが可能となり、爆発を引き起こす要因やメカニズムを見出す助けにもなる。

研究成果の概要（英文）：We study the critical exponent of the blowing up of the solution for a reaction-diffusion system and the life span of the solution for a reaction-diffusion equation. The objective of the study is to understand the mechanism of the blowing up of the solution. In this study, we employ the matrix representing the nonlinearity of the equations. The matrix makes the analysis simple, and helps us to understand the mechanism of the blowing up.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
交付決定額	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：非線形偏微分方程式、非線形放物型方程式、解の爆発

１．研究開始当初の背景

1960 年代の Fujita に始まる反応拡散方程式の爆発臨界指数の研究は、現在も拡張が国内外で試み続けられている。

単独の反応拡散方程式については、解の爆発の可否の境となる非線型性の強さを表す臨界指数が、Fujita により空間次元を用いた形で示されている。この臨界指数は藤田臨界指数と呼ばれ、放物型方程式や消散型波動方程式といった種々の方程式に共通に現れ、解の大域的存在（モデルの時間大域的安定性）と爆発現象（モデルの不安定性）の境目を与えるものである。この問題に空間非一様な効果を与えた場合に、臨界指数にどのような影響が出るかを解析したのが Pinsky である。Pinsky は臨界指数に、空間遠方での効果の強さも寄与することを解明している。

その後 90 年代以降は 2 本以上の連立方程式系への拡張が頓に進められている。連立系の臨界指数を解明することは、連立系特有の非線型性による相互作用の影響を捕らえる上で重要である。モデルの例を挙げると、生物の被食・捕食者系モデル、粘菌の走化性モデル、複数種の化学物質からなる固形燃料の燃焼モデルは、いずれも反応拡散方程式の連立系である。

「特に空間非一様な効果を付加した連立系については Mochizuki-Huang により初めて解析されたが、ここでは 2 本の方程式が共に優線型という仮定が置かれており、2 本の

うち少なくとも１本が劣線型の場合には未解決であった。この問題を解決したのが、2006年の研究代表者による改良 Kaplan 法を用いた解析手法であり、この手法により研究代表者は２本のうち少なくとも１本の方程式が劣線型である場合の臨界指数を解明した。また、この際に用いた手法は汎用性があり、本研究課題で扱う方程式系にも有用である。

２．研究の目的

空間非一様な効果を持つ反応拡散方程式系の爆発解の分類を臨界指数の解明を通して行った。「解の爆発」、つまり解の無限大が起こるか否かは、方程式の持つ非線型性によるため、本研究では爆発と非線型性との間の関係性を解明することを目的とする。その際に、方程式の非線型項を並べた正方行列「冪行列」の構造に着目し、爆発メカニズムの本質的理解を進めた。

反応拡散方程式系は先に述べたように様々な生物・化学現象のモデルとして知られているが、ここでは主に複数種の化学物質からなる固形燃料の燃焼モデルに着目する。固形燃料が n 種類の化学物質からなる場合は、それぞれの物質の比・温度分布を解とする(n+1)本の反応拡散方程式の連立系で表現される。

本研究では、方程式が複数本あることに起因する解の相互作用を詳しく解析した。そのためにはまず少ない本数（２・３本）の方程式系から解析を始めることが不可欠であった。研究代表者は 2006 年に２本の場合について既に結果を得ており、本課題では方程式の本数を増やし３本の場合に取り組んだ。

一般に、寡乗型の反応拡散方程式の連立系は、モデル式の本数が増えるにつれ結果・解析が煩雑になっていく。この煩雑さ・捉えづらさも解消することも目的の一つである。（２本から３本への拡張でさえ各段の困難を伴う。古典力学における２体問題から３体問題への拡張が、いかに困難であるか、我々は知っている。）このために「冪行列」を用いた解析を行った。これは３本の反応拡散方程式の非線型項たちの冪を３×３の実数値正方行列として捉えたもので、これを用いて解析・計算の記述を試みた。冪行列を用いた行列演算は、非線型性による解の相互作用と相性がよく、解析・計算の簡略化・平易化をすることを狙いとする。この幕行列を用いた解析手法は、正方行列のサイズを方程式の本数に合わせて変えることで、方程式が４本以上の場合への適用が期待され、方程式系の持つ相互作用や特性の本質的理解に繋がるものである。

３．研究の方法

解の積分量を解析する Kaplan 法と呼ばれる方法を研究対象に合わせて改良し、適用を行った。これは主に優線型方程式に用いられていた Kaplan 法を劣線形方程式に適用すべく、研究代表者が 2006 年に改良した方法である。また適用する際には、先に述べた冪行列の観点から解析を進め、方程式のメカニズムを捉えやすく纏め直した。

具体的には次の(1)～(3)に場合分けをして解析を行った。

(1) ３本とも優線型の場合

この場合は全ての方程式が優線型のため、既存の手法がほとんどそのまま適用可能であり、臨界指数の解明に成功した。具体的には、３本のうち２本の方程式に対し「放物型方程式の基本的各点評価」を導出し、残りの方程式に対して既存の Kaplan 法を用いて単独の常微分不等式を解析する。その臨界指数の解析結果を「冪行列」 の観点から、方程式の持つメカニズムを捕らえやすく纏め直した。

(2) ２本が優線型・１本が劣線型の場合

上記で述べた改良 Kaplan 法を用いる。具体的には、劣線型方程式と 2 本のうち 1 本の優線型方程式から導出される不等式評価を用いて、残りの 1 本の優線型方程式に改良 Kaplan 法を適用する。その際に劣線型方程式から導出される不等式評価には 2 種類がある。1 つ目は(1)と同様な「放物型方程式の基本的各点評価」。そしてもう 1 つは「比較定理から導かれる劣解評価」である。この 2 つの場合に分けて、改良 Kaplan 法を適用した。

(3) 1 本が優線型・2 本が劣線型の場合

(2) と同様に改良 Kaplan 法を用いるが、この場合は場合分けが多くなる。その理由は、a.解析に用いる不等式評価を 2 種類もつ劣線型方程式が 2 本あることと、b.劣線型方程式同士の相互作用でも爆発が起こり得るからである。

まず a.から説明する。(2) で述べたように、劣線型方程式から導出される不等式評価には「放物型方程式の基本的各点評価」「比較定理から導かれる劣解評価」の 2 種類がある。この場合では劣線型方程式は 2 本あるので実質 3 通りの場合分けが必要であることに注意して解析を行った。その後の解析方法・内容は(2) と同様である。

次に b.について説明をする。Aguirre-Escobedo により劣線型方程式は単独では爆発を起こさないことが知られているが、連立系になると相互作用により劣線型でも爆発が起こり得ることが 2006 年の研究代表者の先行結果や Escobedo-Levine によって解明されている。この場合分けにおいても劣線型の方程式が 2 本含まれるため、上記の相互作用による爆発が起こりうることに注意する。ここで、優線型方程式から「放物型方程式の基本的各点評価」を得た。この不等

式評価を用いた後に、先に述べた改良 Kaplan 法を２本の劣線型方程式に適用することで、臨界指数を明らかにした。

４．研究成果

本研究では、以下の２点について主に解明した。

(1) 反応拡散方程式系の解の爆発条件の冪行列による解析

３本の方程式からなる方程式の解の爆発条件を、それぞれの方程式の有する非線型性を代数的に捉えた正方行列「冪行列」を用いて書き表すことに成功した。

１本１本の方程式の性質は優線型・劣線型の２つに大別されるが、解析の際には３本の方程式のうちの優線型方程式の本数による４つの場合分けを行った。これらの４つのうち、優線型方程式が１本、２本、３本の場合における爆発条件の解明に成功した。手法は、解そのものではなく解の積分量を解析するいわゆる「Kaplan 法」と「解の比較原理」を合わせ、それぞれの場合分けに適用すべく改良して用いた。また、これらの方法を応用することで、３本とも劣線型方程式の場合の爆発条件も解明されつつある。

特に、優線型方程式が１本や２本の場合には、上記で述べた冪行列やその小行列が、結果となる爆発条件の中に現れた。このことは、解析する過程において、冪行列や小行列と爆発解析との相性が良かったことからも、自然なことであろう。

このような冪行列による爆発解析は初めての試みであった。この成果により、本数の多い連立方程式に対する煩雑な爆発解析を簡潔に書き表すことが期待される。複雑な構造を持つ連立方程式系の中で、爆発を引き起こす要因やメカニズムを見出す助けとなるという点でも、重要かつ有意義なものである。

(2) 反応拡散方程式の解の爆発時刻の解析

上記 (1) における非線型効果を解析する上で重要な、解の爆発時刻の解析を行った。冪乗型非線型項を有する単独の反応拡散方程式における、空間遠方で減衰をしない初期状態に対する爆発解の爆発時刻に関する情報を新たに引き出すことに成功した。その際には、全ての方向の無限遠方における初期状態の情報は必ずしも必要ではなく、ある一方向の無限遠方における初期状態の情報のみで十分であることを明らかにした

具体的には、(1)でも用いた改良 Kaplan を更に改善し、ある一方向の無限遠方における初期状態の情報を引き出すべく、使用する補助関数の構造を変えて用いた。

先行研究においては、問題設定や初期状態にパラメタを導入し、そのパラメタを極限操作した時の爆発時刻の漸近解析は多く行われてきたが、パラメタを導入せずに爆発時刻を直接解析したものは少ない。本研究においては、無限遠方での初期状態がどのように爆発時刻に関わるかを見通しよく示した。

この解析に用いた手法は、特に解が空間遠方において爆発を引き起こす場合に非常に有用であり、初期状態が一方向における無限遠方でその最大値となっている場合には、爆発時刻の同定にも成功した。

またこの手法は、別の形状の非線型項や、方程式の本数の変化（連立方程式）にも適用出来るものであり、応用上有用である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

1. Y. Yamauchi, Life span of positive solutions for the Cauchy Problem for the parabolic equations, Int. J. Differ. Equ., 2012 (2012) 1-16, 査読有.
   DOI: 10.1155/2012/417261
2. Y. Yamauchi, Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with initial data having positive limit inferior at infinity, Nonlinear Anal., 2012 (2011) 5008-5014, 査読有.
   DOI: 10.1016/j.na.2011.04.064

〔学会発表〕（計９件）

1. Y. Yamauchi, Life span of positive solutions for the Cauchy Problem for the parabolic equations, The 5th Nagoya Workshop on Differential Equations, 2013 年 3 月 13 日, 名古屋大学.
2. Y. Yamauchi, Life span of positive solutions for the Cauchy Problem for the parabolic equations, The 14th Northeastern Symposium on mathematical Analysis, 2013 年 2 月 18 日, 東北大学.
3. Y. Yamauchi, Life span of positive solutions for the Cauchy Problem for the parabolic equations, 2012 年度日本数学会秋季総合分科会, 2012 年 9 月 20 日, 九州大学.
4. Y. Yamauchi, Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with nondecaying initial data, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012年7月3日, Orlando, Florida, USA.

5. Y. Yamauchi, Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with nondecaying initial data, The 4th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2011 年 12 月 1 日, 早稲田大学.
6. Y. Yamauchi, Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with nondecaying initial data, RIMS 研究集会 非平衡非線形現象の解析 -発展方程式の立場から-, 2011 年 10 月 24 日, 京都大学数理解析研究所.
7. Y. Yamauchi, 無限遠方にて減衰しない初期値に対する熱方程式の解の爆発時刻に関する指向性を持つ評価, 2011 年度日本数学会秋季総合分科会, 2011 年 9 月 30 日, 信州大学.
8. Y. Yamauchi, Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with nondecaying initial data, One Forum, Two Cities: Aspect of Nonlinear PDEs, 2011 年 8 月 30 日, National Taiwan University.
9. Y. Yamauchi, Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with nondecaying initial data, The 36th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 2011 年 8 月 23 日, 北海道大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

山内　雄介 (YAMAUCHI YUSUKE)
早稲田大学・重点領域研究機構・研究員
研究者番号：００４５１４３５