様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 28 年　 6 月 14 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2015
課題番号：２３７４０１３０

研究課題名（和文）変分的手法による非線型楕円型方程式の研究

研究課題名（英文）A study of nonlinear elliptic equations with variational methods

研究代表者
平田　潤（HIRATA, Jun）

早稲田大学・理工学術院・その他

研究者番号：１０５８０４８３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：非線型楕円型方程式の非自明解の存在問題および解の挙動についての研究を行った。
変分的な手法を用い、方程式に対応する汎関数の精密な評価を行うことでPalais-Smale 条件が崩れている場合での非自明解の存在定理を与えた。この手法により既知のものよりも一般的な非線型条件のもとで方程式の非自明解を得ることに成功した。またこの応用として、特異摂動問題などの問題にも取り組んだ。

研究成果の概要（英文）：We study nonlinear elliptic equations and in paticular the existence of non-trivial solutions.
We succeed to show the existece of positive solutions in the situation where the corresponding functional does not satisfy the Palais-Smale condition. We give a new estimate for functionals which enable us to show the existece of critical points. As its application, we also study singular perturbation problems.

研究分野：関数方程式

キーワード：変分法　非線型楕円型方程式

１．研究開始当初の背景

（１）非線型楕円型方程式はシュレディンガー方程式などをはじめ、様々な物理現象の定常状態を記述する際に現れる基本的な方程式である。これまでも多くの研究者によって一般的な非線型条件のもとでの方程式の非自明解が存在定理およびその解の挙動などが研究されている。

（２）とくに方程式が空間変数に依存しない場合には、Berestycki-Lions および Berestycki-Gallouet-Kavian（参考文献[1],[2]）　らによって、非線型項の条件がほとんど必要十分条件に近い条件のもとで非自明解の存在定理が与えられている。彼らの研究では、無限次元での条件付き極値問題を考えることによって非自明解の存在を示しているが、この際に技術的な問題によって、考える空間の次元が２次元の場合と３次元以上の場合とで異なる極値問題を設定しており、その結果、得られた非線型条件が次元によってわずかに異なっており（２次元の場合、非線型項の原点付近の状況にやや強い条件を用いている)、本質的とは言えないギャップが見られる。また同様な条件のもとで方程式に対応する汎関数を考えると、これは変分構造をもっており変分法を用いるのに適しているにも関わらず、変分的なアプローチによる解決はこれまであまり行われておらず、その点に関しても研究する余地が残る。

（３）一方で、方程式が空間変数に依存する場合には事情が大きく異なる。実際、前述の空間変数に依存せず非自明解の存在が明らかとなっている方程式に空間変数に依存するように微小な摂動を加えた場合、ごくわずかな摂動であっても非自明解が非存在となる例を簡単に構成することができる。このため空間変数に依存する非線型楕円型方程式の非自明解の存在問題はよりデリケートな扱いが必要となる。このような問題が生じる主な原因は、方程式を全空間で考えた場合に、対応する汎関数が Palais-Smale 条件およびそれに類するコンパクト性の条件をみたさず、変分的な解析が困難になっていることに起因する。

（４）このような問題を克服するため、方程式が空間変数に依存する場合の既存の研究では非線型条件に何らかの大域的な条件を課して解析するのが主流である。ここでは代表的な２つの条件を述べる。

①方程式に対称性を持たせて解析する。とくに球対称性やそれに類する無限群の対称性を与えた場合、関数空間の埋め込みがコンパクトになるため、Palais-Smale 条件などが成立し、方程式の非自明解の存在を示すことができる。またそこまで強い対称性でなくとも、偶関数などの有限群での対称性の下で、方程式に対応する汎関数の評価を行うことで非自明解の存在を明らかにしている研究も行われている。

②非線型項の形状に強い条件を課す。たとえばシュレディンガー方程式のポテンシャル項において、無限遠での収束値よりも内部の値が常に小さいなどの仮定を課すことにより、極限汎関数の臨界値と比較から Palais-Smale 条件の崩れを回避することが可能となる。この手法は変分的なアプローチと相性が非常に良いため、これまで多くの研究で用いられている。

これらのように方程式に大域的な条件を加えることで対応する汎関数のコンパクト性を導く研究はこれまでに多くなされてきている。これらの条件は技術的に扱いやすい条件であるものの、一方で適用可能な方程式の種類を制限してしまっている。

（５）非線型楕円型方程式の解の挙動を解析するものとして特異摂動問題が挙げられる。例えばシュレディンガー方程式の場合、摂動に応じて、ポテンシャルの臨界点にスパイク状の解が集中していく現象が見られる。この問題においては、ポテンシャルの極小点に集中する解を構成することに比べて、極大点や鞍点に集中する解を構成することは難しい問題となっている。

２．研究の目的

（１）非線型楕円型方程式の非自明解の存在および解の挙動の研究を行う。とくに一般的な非線型項のもとでの非自明解の存在定理を得ることおよび特異摂動問題などを通して解の挙動を明らかにすることを目的とする。

（２）方程式が空間変数に依存しない場合には、既知の研究において非常に扱いやすい非自明解の存在定理が知られている。しかし、存在定理を導くための技術的な要因によって、２次元の場合と３次元以上の場合とで適用可能な非線型項の条件がわずかに異なっている。さらに方程式が変分構造を持つにも関わらず、変分的アプローチによる研究はあまりなされていない。本研究では変分的な手法を用いてこれらの問題に取り組み、既知の定理の次元によるギャップなどを埋めること、および変分法を用いた解析を行うことを目的とする。

（３）方程式が空間変数に依存する場合には、既知の研究では対称性などの大域的な条件を用いている場合がほとんどである。これは技術的には妥当な条件であるものの、方程式を考える上では本質的なものではないため、このような条件を課さない非自明解の存在定理を得ることを目的とする。その過程で、方程式に対応する汎関数の臨界値（あるいはその候補となる値）の評価が重要となるが、それについて既知のものよりもより精密に

評価が可能となるような手法を与えることを目的とする。

（４）非線型楕円型方程式の特異摂動問題に取り組み、解の挙動について解析を行う。とくにシュレディンガー方程式においてポテンシャルの極大点や鞍点に集中する解を構成することの研究を行う。

３．研究の方法

変分的な手法を用いて非線型楕円型方程式の解の存在およびその解の挙動を研究する。

具体的なアプローチとしては、方程式に対応する汎関数に対して峠の定理(Mountain pass theorem)などを用いて臨界点を求めていく。しかしこの問題では、とくに方程式が空間変数に依存する場合、峠の定理を使う上で重要となる Palais-Smale 条件と呼ばれる条件をみたしていない。このため、既存の研究では方程式に対称性を持たせたり、ポテンシャル項の形状に制限を加えるなど大域的な条件を課した上で解析している場合がほとんどである。このような大域的な条件を用いれば、汎関数の臨界値の評価を行いやすくなり、Palais-Smale 条件をみたすような臨界点の存在が導かれる。これらの条件は変分的なアプローチを行う際に、対応する汎関数のコンパクト性を導く上で非常に扱いやすい条件ではあるものの、一方で適用可能な方程式の非線型条件を制限してしまっている。

今回の研究では、これまでのような大域的な条件を課すのではなく、汎関数の臨界値付近での評価をより精密に行うことで、より幅広い非線型条件のもとで方程式の非自明解の存在を示す。

具体的には interaction method と呼ばれる手法を用いて、方程式のある種の近似解（極限方程式と呼ばれるものの解）に対して、それらの重なる部分についてより精密な汎関数の値の評価を与えることで、Palais-Smale 条件が成り立っていることを示す。

４．研究成果

（１）方程式が空間変数に依存しない場合に変分的な手法を用いて、一般的な非線型条件のもとで、方程式の非自明解の存在定理を得た。既存の研究では無限次元での条件付き極値問題を解くことで同様な結果が得られているが、技術的な問題により３次元以上の場合に比べて２次元の場合には若干、適用可能な方程式の種類に制限があった。また方程式に対応する汎関数が変分構造をもつにも関わらず、変分的なアプローチはこれまであまり行われてこなかった。

今回変分的なアプローチを使った証明により、前述の次元によるギャップを埋めることなどが可能となった。この際に、方程式の解がもつ特徴（Pohozaev の等式など）を用いて、汎関数の臨界点を既存のものよりも精密に解析していることが特徴となっている。この手法は特異摂動問題（研究結果（３））にも応用して用いることが可能である。

この研究によって２次元の場合に見られたギャップを解消し、適用可能な方程式の範囲が拡張され、また変分的なアプローチを用いることが可能であることから、特異摂動問題などさらなる応用が期待できる。

（２）方程式が空間変数に依存する場合について、非自明解の存在定理が得られた。変分的なアプローチで解析を行う場合、対応する汎関数が Palais-Smale 条件が成り立っているかが分かりにくいことが大きな障害となっており、そのため既存の研究では方程式に対称性や、あるいは方程式のポテンシャル項の形状に大きな制限を加えることで、Palais-Smale 条件の崩れを回避していた。しかし今回の研究では汎関数を精密に評価することで、これらの大域的な条件がなくても、Palais-Smale 条件が成り立つことを確認することに成功した。具体的には、汎関数を評価する際に、近似解の一種である極限解同士の重なり具合(interaction) の評価が問題となるが、既存の研究よりも極限解の無限遠での減衰具合に対して精密な評価を行い、それによって interaction の精密な評価を行っている。この手法により、方程式に大域的な条件を課さなくても、 interaction の評価が可能となり、より幅広い非線型条件のもとで、方程式の非自明解の存在を明らかにした。この結果は後述の学会発表②などで発表を行った。

（３）空間変数に依存する非線型楕円型方程式について、特異摂動問題の研究に進展が見られた。特異摂動問題では摂動によって解がどのような挙動を見せるかを解析することが重要となり、そのため極限方程式と呼ばれる方程式やそれに対応する極限汎関数の解析が重要となる。これまでは、空間の点をそれぞれに対応する極限汎関数の解析を通じて特異摂動問題を考えることが一般的であったが、今回、空間変数をパラメータとみなして極限汎関数を考えることで、その臨界点の存在を通して特異摂動問題を考えることができるようになった。

例えばシュレディンガー型の方程式に関しては、摂動に応じてポテンシャルの臨界点付近に解が集中していくが、これまでの手法ではポテンシャルの極大点に集中する解を解析するのは極小点に集中するものに比べて困難であったが、今回の手法を用いれば、極大点のみならず鞍点に集中する解などを解析するときに用いることも可能である。

（４）これらの研究結果について、いくつかは研究集会等で発表を行っているが、技術的

に改良できるものも多く、また特異摂動問題などに応用できるため、これらの問題を含めて現在、論文などにまとめる作業を続けているところである。

＜参考文献＞

[1] H.Berestycki, P.-L. Lions, Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state, Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983), no.4 313-345.

[2] H.Berestycki, Th. Gallouet, O.Kavian, Equations de Champs scalaires euclidiens non lineaires dans le plan, Publications du Laboratoire d'Analyse Numerique, Universite de Paris VI (1984)

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　０件）

〔学会発表〕（計　２件）
① 平田潤, 非線型 Schrodinger 方程式の Mountain pass 値の評価と非自明解の存在, 第 7 回非線形偏微分方程式と変分問題, 2013 年 2 月 9 日, 首都大学東京(東京都)
② 平田潤, 非線型 Schrodinger 方程式の非自明解の存在, 東工大セミナー, 2012 年 6 月 25 日, 東京工業大学(東京都)

〔図書〕（計　０件）

６．研究組織
(1)研究代表者

平田　潤（HIRATA, Jun）
早稲田大学・理工学研究所・招聘研究員
研究者番号：１０５８０４８３

(2)研究分担者　該当なし

(3)連携研究者　該当なし