様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ４ 月 ３０ 日現在

機関番号：３４３０４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４０１３１

研究課題名（和文）プラズマ物理に現れる準線形シュレディンガー方程式の双対変分構造に着目した研究

研究課題名（英文）Research on quasilinear Schrodinger equations arising plasma physics, which focuses on a dual variational structure

研究代表者
渡辺　達也（WATANABE, Tatsuya）

京都産業大学・理学部・准教授

研究者番号：６０５４９７４９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）： 本研究では、プラズマ物理学に現れる準線形シュレディンガー方程式を考察した。ここで扱う方程式は超流動薄膜内を伝播する波動関数の挙動を記述し、ポリマーフィルムコーティングに応用される。
本研究の主結果は、定常状態を記述する楕円型偏微分方程式における、エネルギー最小解の一意性およびパラメータに関する漸近挙動を解析したことである。特に、パラメータが十分大きい場合および十分小さい場合に、今まで未解決だった一意性問題を解決した。漸近挙動については、非線形項の指数によって挙動が大きく変化することを証明した。本研究の特徴は、方程式が持つ双対変分構造と呼ばれる構造に着目し、その対応を解明したことである。

研究成果の概要（英文）： In this research, we studied a quasilinear Schrodinger equation arising in plasma physics. This equation describes behavior of wave functions spreading through "superfluid films", which are applied to polymer film coatings.
The main results of this research were to analyze the uniqueness and the asymptotic behavior with respect to a physical parameter of ground states for an elliptic partial differential equation which appears as a stationary problem. Especially when the parameter is sufficiently large or sufficiently small, we were able to solve the uniqueness problem, which was left open up to now. As to the asymptotic behavior, we proved that it changes drastically depending on the exponent of the nonlinear term. A feature of this research was to focus on a “dual variational” structure of the equation and to clarify its correspondence.

研究分野： 変分的手法による楕円型偏微分方程式の解析

キーワード： 大域解析学　関数方程式論　変分法　準線形方程式

１．研究開始当初の背景

本研究では、プラズマ物理に現れる準線形シュレディンガー方程式における定常問題の解構造について考察した。この方程式は、超流動薄膜の中を伝播する波動関数の挙動を記述し、物理学者 kurihara(1981)によって導出された。超流動薄膜は、近年注目されているポリマーフィルムコーティングなどに応用されている。

方程式には準線形項の効果の強さを表す物理パラメータが含まれており、パラメータを 0 とした(半線形)シュレディンガー方程式については、盛んに研究されている。特に、応用上重要な定在波解の安定性については Berestycki, Cazenave, Lions の研究を機に、1980 年代以降目覚ましい発展を遂げている。パラメータが 0 の場合は、対応する定常問題の**エネルギー最小解の一意性・非退化性**が知られており、このことが安定性解析を行う上で重要な役割を果たしている。

一方でパラメータが正の準線形方程式について、物理学者 Brizhik ら(2001)は形式的計算によって、準線形項が定在波解を安定化させると主張した。その主張の数学的厳密化は未だ解決されていない。その要因の 1 つは、対応する定常問題の解構造、特にエネルギー最小解の一意性・非退化性が未だに分かっていないことにある。

既存の研究によって、対応する定常問題として得られる(準線形)楕円型偏微分方程式は、2 つの大きな特徴を持つことが知られている。1 つ目は、エネルギー最小解が存在するための非線形項の臨界指数が、パラメータが 0 の場合の指数 (ソボレフの臨界指数) よりも大きくなることである。したがって解構造は、非線形項の指数およびパラメータの大きさの組み合わせによって、様々に分類されると予想され、ある範囲内では一意性が成り立たない可能性もありうる。

もう 1 つの大きな特徴は、定常問題が**双対変分構造**を持つことである。準線形方程式を直接解析することは一般に難しい。しかし、ある実楕円積分によって定義される写像の逆写像を用いて変換を行うと、準線形方程式と、ある半線形方程式が 1 対 1 に対応する。さらに、その写像はエネルギーの値を不変に保つ変換となる。この意味で、方程式は双対変分構造を持つと言われる。

この特徴付けによりエネルギー最小解の存在・一意性の解析が行いやすくなる。その一方で、変換による線形化作用素のスペクトルの対応は明らかになっていない。もし変換によるスペクトルの対応が分かれば、非退化性の解析も格段に行いやすくなる。

２．研究の目的

研究目的は大きく分けて 2 つある。

(1) エネルギー最小解の一意性について、指数・パラメータによる分類を行うこと。
(2) 双対変分構造の対応を解明すること。

３．研究の方法

(1) **エネルギー最小解の一意性に対する、指数・パラメータによる分類**

この研究に対しては、2 つのアプローチが考えられる。

① 摂動法による解析

この方法では、パラメータを 0 に近づけたときのエネルギー最小解の漸近挙動を解析する。得られた極限方程式のエネルギー最小解の一意性・非退化性を用いることで、パラメータが十分小さい場合の一意性・非退化性を導く方法である。

定常問題において形式的にパラメータを 0 にした方程式のエネルギー最小解は、指数がソボレフ臨界指数よりも小さいならば一意かつ非退化であることが知られている。したがって、この場合はパラメータが小さいときでも同じ性質が成り立つことが期待出来る。

証明のカギとなるのは、エネルギー最小解のパラメータに関する一様有界性である。そのために、楕円型偏微分方程式論における爆発解析もしくは正則性理論を用いる必要がある。

一方でパラメータが正のときは、指数がソボレフ臨界指数より大きい場合でもエネルギー最小解が存在する。しかし、パラメータを 0 とした方程式においては､存在しない。したがって、この場合のエネルギー最小解は爆発すると予想される。その詳細な漸近的プロファイルを解析することが、この場合における始めのステップである。対応する極限方程式は、これまで知られていないものになるので、そのエネルギー最小解の一意性・非退化性の証明も必要となる。

② 常微分方程式論による解析

この方法は、半線形楕円型偏微分方程式の正値球対称解に関する一意性・非退化性の既存結果を直接適用するものである。

エネルギー最小解は、正値球対称であることが知られているので、変換した方程式の正値球対称解の一意性が示されれば、元の方程式のエネルギー最小解の一意性も得られることになる。

この方法のカギは、既存結果を適用するために必要な仮定の成立を示すことである。そのために、指数やパラメータに関する制限が必要となる可能性がある。

さらにこの方法では、元の方程式のエネルギー最小解の非退化性を直接証明することが出来ない。そのため、変換によって線形化作用素のスペクトルがどのように対応するのかをきちんと調べる必要がある。

(2) **双対変分構造の対応の解明**

この研究では、双対変分構造を与える変換による線形化作用素のスペクトルの対応を明らかにする。さらに、微分項にどういった条件があれば、同じような双対変分構造が得られるかを考察する。

方程式をシンプルな形に変換することが出来れば、解析しやすいことは間違いない。特に楕円型偏微分方程式においては、最大値原理・正則性理論といった、解の定性的性質を調べる上での基本的な道具が自由に使用できる。
しかし、いつでも変換が可能な訳ではない。そこで、準線形方程式を半線形方程式に変換する、ある種の一般論を考察する。そのことによって、他の準線形微分方程式の解析にも寄与できると考えられる。

４．研究成果
本研究で得られた結果について、研究方法の各項目に対応する形で述べる。
(1) **エネルギー最小解の一意性に対する、指数・パラメータによる分類**
① 摂動法による解析
初めに、非線形項の指数がソボレフ臨界指数よりも小さい場合を考察した。

・1つ目の結果では、指数が 3 以上という追加仮定の下で、パラメータが小さい場合のエネルギー最小解の一意性・非退化性を示すことが出来た。
研究方法で述べたように、解の一様有界性を得ることが証明のカギとなる。本研究では、爆発解析を用いて、その証明を行った。この場合、Liouville 型定理と呼ばれる、楕円型偏微分方程式の解の非存在定理を得る必要がある。
指数が 3 以上ならば、我々が考える準線形方程式に対する Louville 型定理が得られた。指数が 3 より小さい場合、準線形項の退化性が本質的に効いてくるために、技術的理由によって結果が得られなかった。

・2 つ目の結果として、3 以上という指数に関する制限を外すことが出来た。この結果のポイントは、解の一様有界性を爆発解析ではなく、反復法に基づく楕円型偏微分方程式の正則性理論を用いたことである。
また、エネルギー最小解の変分的特徴付けをうまく用いることで、Allen-Cahn 型など、広いクラスの非線形項に対するエネルギー最小解の漸近的性質を統一的に扱うことができる結果を得た。

・3 つ目の結果として、空間 2 次元の問題を考察した。この場合は非線形項がべき型だけでなく、指数型であってもエネルギー最小解の漸近的性質を証明することが出来た。
空間 2 次元の場合の難しさは、解の収束性を示す部分である。エネルギー最小解の変分的特徴付けとスケーリングの議論をうまく組み合わせて、この困難さを克服した。

次に、非線形項の指数がソボレフ臨界指数よりも大きい場合を考察した。

・1 つ目の結果として、エネルギー最小解が爆発することを示し、その漸近挙動についての結果を得た。つまり、この場合の漸近挙動は指数が小さいときに比べて、劇的に変化することが分かった。
楕円型偏微分方程式において、指数がソボレフの臨界指数よりも大きい場合を扱った研究はほとんどなく、我々が扱う準線形問題特有の現象を捉えることができた。さらに、得られた極限方程式は、これまでに知られていない新しいものになっている。
この結果のポイントは、うまくエネルギー最小解をスケール変換することで、漸近挙動が解析出来るようになることである。変換後の方程式に対して、これまでの結果と同様の議論を行って、必要な評価を導いた。

・2 つ目の結果として、パラメータが十分に小さい場合に、エネルギー最小解の一意性および非退化性を示すことが出来た。
この結果を得るためのカギとなるのは、対応する極限方程式のエネルギー最小解の一意性および非退化性である。この方程式は zero mass 型と呼ばれる楕円型偏微分方程式となっており、その解構造は非常に複雑になる。しかし、常微分方程式論の手法を駆使することで、一意性と非退化性を示すことが出来た。
上に述べたように、楕円型偏微分方程式において、指数がソボレフの臨界指数よりも大きい場合の結果は少ないため、極限方程式に関する結果自体が非常にユニークである。さらにこの結果は、エネルギー最小解以外の解を考察する際にも重要な役割を持つことが、最近の研究で分かっている。

以上の結果によって、エネルギー最小解の漸近挙動に関する指数の分類を行うことが出来た。残されたケースは、非線形項の指数がソボレフ臨界指数と等しい場合である。この場合は、方程式が持つスケール普遍性によって、さらに解析が難しくなる。新たな手法を取り入れることで、この残された問題を解決したい。
本結果は、国内外の多くの研究者から興味を持たれ、実際に定在波解の安定性解析にも応用された。さらに、本研究で用いた手法・議論自体も他の研究者によって使用されている。

② 常微分方程式論による解析
この研究では、パラメータが大きいことが解析のカギとなった。

・1 つ目の結果では、パラメータが十分に大きいならば、エネルギー最小解が一意であることを示した。
この結果のポイントは、非線形項の指数の大小に関する条件がなく、エネルギー最小解が存在する範囲すべてをカバー出来ている

ことである。特に、指数がソボレフ臨界指数以上であっても、統一的に結果が得られることが特徴である。
一方で、この結果を得た時点では、双対変分構造を与える変換による線形化作用素のスペクトルの対応が得られていなかった。したがって、この結果ではエネルギー最小解の非退化性が得られなかった。

・2 つ目の結果では、空間 2 次元で非線形項が指数型の場合に、パラメータが十分大きいならばエネルギー最小解が一意かつ非退化であることを示した。
この結果では、前と同じように半線形楕円型微分方程式の正値球対称解の一意性に関する既存の結果を適用する。その条件の成立を確かめるときに、非線形項が指数型であることの難しさが現れる。指数型の非線形項を持つ楕円型偏微分方程式における正値解の一意性の結果自体が少ないため、その観点からも本結果は重要であると思われる。
また、本結果における重要な成果は、双対変分構造を与える変換による線形化作用素のスペクトルの対応が得られたことである。これによって、エネルギー最小解の非退化性も解析出来るようになった。

以上の結果によって、パラメータが大きい場合に、エネルギー最小解の一意性を示すことが出来た。指数の大小に関する制限が必要ないということが、パラメータが小さい場合との相違点であり、ユニークな点である。
本結果も国内外の多くの研究者から興味を持たれ、我々の方程式を一般化した問題に対する拡張などがされている。
この結果のネックは、パラメータが大きいという仮定である。これは、元の物理モデルからすると不自然な仮定である。さらに詳細な解析を行って、パラメータに関する制限を緩めることが、今後の課題である。

(2) **双対変分構造の対応の解明**
上に述べた結果によって、双対変分構造を与える変換による線形化作用素のスペクトルの対応が明らかになった。
具体的には、変換によって解の 1 対 1 対応が得られるだけでなく、線形化作用素のスペクトルも 1 対 1 に対応することが分かった。さらに、この対応は、次元や非線形項の形によらず、変換の性質のみから得られることが証明できた。
この性質により、定常問題の解構造の解析が格段に行いやすくなった。最近では、我々の方程式を一般化した問題や他のタイプの準線形方程式が盛んに研究されている。これらの方程式における変換にも、本研究で得られた議論は適用出来ると考えている。
したがって、一般の双対変分構造に対する考察や、時間発展の問題への応用が今後の課題として残されている。

最後に、準線形シュレディンガー方程式に関する結果だけでなく、他の偏微分方程式も考察した。具体的には、非線形波動方程式の周期解に関する結果が得られた。また、弾性膜の変形を記述する楕円型偏微分方程式において、解の多重存在に関する結果を得た。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）

① M. Fukunishi, T. Watanabe,
「Variational approach to MEMS model with fringing field」,
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 423 (2015),
pp. 1262-1283, 査読あり
DOI:10.1016/j.jmaa.2014.10.053
② S. Adachi, T. Watanabe,
「Uniqueness and non-degeneracy of positive radial solutions of quasilinear Schrödinger equations」,
京都大学数理解析研究所講究録 No.1901 (2014), pp. 99-115, 査読なし
③ Shinji Adachi and Tatsuya Watanabe,
「Uniqueness and non-degeneracy of positive radial solutions for quasilinear elliptic equations with exponential nonlinearity」,
Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, 108 (2014),
pp. 275-290, 査読あり
DOI:10.1016/j.na.2014.05.020
④ Shinji Adachi, Masataka Shibata and Tatsuya Watanabe,
「Asymptotic behavior of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations in R^2」,
Funkcialaj Ekvacioj. 57 (2014),
pp. 297-317, 査読あり
⑤ Shinji Adachi, Masataka Shibata and Tatsuya Watanabe,
「Blow up phenomena and asymptotic profiles of ground states of quasilinear elliptic equations with H^1-supercritical nonlinearities」,
Journal of Differential Equations,
256 (2014), pp. 1492-1514, 査読あり
DOI:10.1016/j.jde.2013.11.004
⑥ Shinji Adachi, Masataka Shibata and Tatsuya Watanabe,
「Asymptotic behavior of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations with general nonlinearities」,
Communication in Pure and Applied Analysis,
13 (2014), pp. 97-118, 査読あり
DOI:10.3934/cpaa.2014.13

⑦ Tatsuya Watanabe,
「Variational approach to the existence of periodic solutions for a completely resonant nonlinear wave equation」,
Advances in Mathematical Sciences and Applications, 23 (2013),
pp. 339-363, 査読あり
⑧ Shinji Adachi and Tatsuya Watanabe,
「Asymptotic properties of ground states of quasilinear Schrödinger equations with H^1-subcritical exponent」,
Advanced Nonlinear Studies, 12 (2012),
pp. 255-279. 査読あり
⑨ Shinji Adachi and Tatsuya Watanabe,
「Uniqueness of the ground state solutions of quasilinear Schrödinger equation」,
Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, 75 (2012),
pp. 819-833. 査読あり
DOI:10.1016/j.na.2011.09.015

〔学会発表〕(計 6 件)
① Tatsuya Watanabe
「Periodic solutions of completely resonant nonlinear wave equations」,
10th AIMS conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications,
2014 年 7 月 8 日, Madrid, Spain
② 足達慎二, 渡辺達也
「Uniqueness and non-degeneracy of positive radial solutions for quasilinear elliptic equations with exponential nonlinearity」,
日本数学会 2014 年 春季年会,
2014 年 3 月 17 日, 学習院大学
③ 渡辺達也
「Uniqueness and non-degeneracy of positive radial solutions of quasilinear Schrödinger equations」,
RIMS 研究集会:常微分方程式の定性的理論の新展開, 2013 年 11 月 20 日,
京都大学数理解析研究所
④ 足達慎二, 柴田将敬, 渡辺達也
「Uniqueness and non-degeneracy of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations with general nonlinearities」,
日本数学会 2012 年度秋季総合分科会,
2012 年 9 月 18 日, 九州大学
⑤ Tatsuya Watanabe
Uniqueness and non-degeneracy of ground states of quasilinear Schrödinger equations」,
The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications,
2012 年 7 月 3 日, Florida, USA
⑥ 足達慎二, 渡辺達也
「Asymptotic properties of ground states of quasilinear Schrödinger equations with H^1-subcritical exponent」,
日本数学会 2012 年春季年会,
2012 年 3 月 26 日, 東京理科大学

6. 研究組織
(1) 研究代表者
渡辺　達也 (WATANABE, Tatsuya)
京都産業大学・理学部・准教授
研究者番号：60549749
(2) 研究協力者
足達　慎二 (ADACHI, Shinji)
静岡大学・工学部・准教授
研究者番号：40339685

柴田　将敬 (SHIBATA, Masataka)
東京工業大学・理工学研究科・助教
研究者番号：90359688