

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 16 日現在

機関番号：34315

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740132

研究課題名(和文) 同値関係から生成されるヘッケ・フォンノイマン環の解析と保型形式への応用について

研究課題名(英文) Investigation of Hecke von Neumann algebras determined by equivalence relations and applications to automorphic forms

研究代表者

青井 久 (Aoi, Hisashi)

立命館大学・理工学部・准教授

研究者番号：90396276

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：同値関係から決まるヘッケフォンノイマン環の解析を行ない、その構造を決定することに成功した。具体的には、群で知られている Schlichting completion の議論を同値関係の理論に応用することにより、そうしたヘッケフォンノイマン環は群のヘッケ対から定まることを証明した。これは、群について知られているヘッケ作用素の理論が同値関係のヘッケフォンノイマン環へと適用できることを意味しており、保型形式の観点からも興味深い結果である。
また、数学ソフトウェア SageMath を活用することにより、同値関係の理論の可視化を行うことに成功した。

研究成果の概要(英文)：We investigated Hecke von Neumann algebras which come from equivalence relations, and succeeded to determine their structures. By applying the notion of Schlichting completion, we proved that any such Hecke von Neumann algebras arise from Hecke pair of groups. It means that we can apply the theory of Hecke operator for groups to the Hecke von Neumann algebras. So our results are interesting in terms of the theory of automorphic forms.
We also succeeded to visualize some equivalence relations by using the mathematical software SageMath.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環 フォンノイマン環 ヘッケ対 ヘッケ作用素

1. 研究開始当初の背景

正規部分群の概念を一般化することにより、ヘッケ対と呼ばれる群-部分群の組が定義できる。この性質を持つ組に対しては、両側剰余類を考えることでヘッケ環と呼ばれる環が構成できる。ヘッケ環はモジュラー形式の理論等、数論の分野と深く関わって解析が行われてきた。

こうしたヘッケ環と作用素環論との関わりは、Bost-Connes によって明らかになった。実際、ヘッケ対からヘッケ C^* 環と呼ばれる作用素環が構成され、それは特別な場合にはリーマンゼータ関数に関連していることが明らかになった。このように得られる C^* 環は対応するフォンノイマン環の解析と共に、「Bost-Connes 型」という枠組みで研究が続けられており、現在に至っている。

一方、研究代表者は群の作用を一般化した同値関係から生成されるフォンノイマン環の研究を進めていた。その結果、ヘッケ対を群に限らない、同値関係-部分同値関係に対しても特徴付けることができることや、新たなヘッケ・フォンノイマン環が構成できることが判明した。この理論は、既存のヘッケ環の概念を包括するものであった。

同値関係から得られたヘッケ環の特徴は、群の世界における作用の同値類を直接同値関係の軌道として捉えていることである。

こうした観点でヘッケ環の解析を行うことで、これまで多くの結果が知られている測度空間上の同値関係の理論を用いることが可能となる。

更に、軌道は数論においてモジュラー形式を扱う際に重要な概念である。同値関係から得られるフォンノイマン環の理論を既存の数論の議論と対応させることにより、新たな関係が見出されることが期待できた。

2. 研究の目的

以上の背景の元、本研究はヘッケ・フォンノイマン環の構造解析を通じて、ヘッケ・フォンノイマン環の保型形式への応用、とりわけヘッケ作用素の理論への適用することを目的とするものである。それに加えて、研究対象の可視化についても目標として定めた。具体的には、以下のものである：

(1) ヘッケ・フォンノイマン環の構造解析

ヘッケ作用素とヘッケ環の関連は、群を由来とするものに対しては知られていたが、同値関係から定義したものに関しては未知であった。これは、同値関係が群の構造ではなく、同値類の軌道によって定まっていることから、既存の群の理論を単純に適用できないことに由来するものと考えられていた。そこで、本研究では、ヘッケ作用素の構造を同値類の観点から考察、特徴付けを行うことにより、「群の情報が消えている」ヘッケ・フォンノイマン環に対してもその構造の解析を行うことを目標とした。

(2) 保型形式への応用

数論におけるモジュラー形式のみならず、ある種の作用で不変な集合は、「一般化された保型形式」として様々な方面で用いられ、解析されている。本研究では、同値関係から決まるヘッケ・フォンノイマン環の表現を与えることを通じて保型形式の理論への応用を与えることを目標とする。

(3) 同値関係の理論の可視化

測度空間上の同値関係は抽象的な対象であるため、専門家以外にはイメージが困難であるものが多い。これを「分かりやすい」形で示すことは、理論の解析への手掛りとなるだけでなく、広く、他分野の研究者や社会へ成果を発信することにも直結することである。そこで、数学ソフトウェアを活用することで、同値関係の可視化を行うことを目標とする。

3. 研究の方法

これまで進めていた作用素環論と測度空間の理論の関連に加えて、保型形式に関わる数論としての観点を踏まえて進めた。

具体的には、作用素環論においては「群から決まるヘッケ環」において知られている理論を「同値関係から決まるヘッケ環」へと適用させること、数論の立場からは「同値関係の軌道」の解析により同値関係から決まるヘッケ作用素の理論を(一般化された)保型形式に対して適用させることを主眼に置いて研究を進めた。

これらの概念は互いに密接に関わっていることから、その相互関係を常に考慮して研究を進めた。

また、同値関係の可視化の議論においては、豊富な機能と柔軟性を持つ数学ソフトウェア SageMath を活用する方向で進めた。SageMath は汎用的なプログラミング言語として知られる Python をベースに構築されており、既存の様々な数学ソフトウェアへのインターフェースとして利用できるだけでなく、Python 自体の機能を最大限に活かしたプログラミングも可能であるという柔軟性も持っている。

研究代表者は研究開始時点で Sage Notebook サーバを所属機関内の教育用途として運営していたことから、その経験を活かして情報公開用の Sage Notebook サーバを設定、運用し具体的な計算としての検証から研究成果の発表まで、幅広い用途で用いた。

4. 研究成果

同値関係から決まるヘッケ・フォンノイマン環の構造を決定することに成功した。具体的には、群で知られている Schlichting completion の議論を同値関係の理論に応用することにより、全てのヘッケ・フォンノイマン環は群のヘッケ対から定まることを証明した。

実際，同値関係のヘッケ対に (R,S) に対して，preferable という良い性質を持つ choice functions を構成し，それにより自然に定義される 1-cocycle である index cocycle を考える．ヘッケ対の性質から，

は部分同値関係上ではコンパクト群に値を取り，preferable の性質からそれは minimal 1-cocycle になる．この解析を行うことで，上記の結果が得られる．

これは，群について知られているヘッケ作用素の理論が同値関係のヘッケ・フォンノイマン環へと適用できることを意味しており，保型形式の観点からも興味深い結果であると言える．

以上の成果は，現在論文として執筆中である本研究では，現在知られている具体的な保型形式に関わる応用にまで踏み込むことはできなかった．しかしながら，ここで得られた結果は，そうしたアプローチが可能であることを保証するものであるものと言うことができ，本研究の成果の1つと言うことができる．

また，同値関係の可視化については，数学ソフトウェア SageMath を活用することにより具体的な対象に対して試みた，いくつかの研究集会で発表した．

まず，円周上の単純な回転

$$z \rightarrow ze^{it}$$

という対応は 図1 のように表すことができ，これは同心円が包絡線として得られることが分かる．

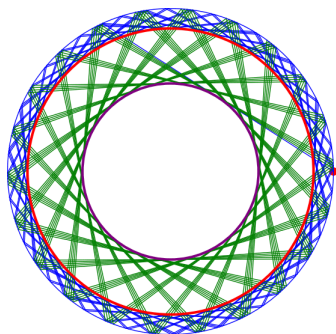


図 1

しかしながら， $[0,1]$ の 2 進展開により得られる加算器変換

$$\begin{aligned} 1/2 &= 0.1_2 & 0.01_2 &= 1/4 \\ 1/4 &= 0.01_2 & 0.11_2 &= 3/4 \\ 3/4 &= 0.11_2 & 0.001_2 &= 1/8 \end{aligned}$$

...

の場合， $[0,1]$ 区間を円と同一視すると，図2 のように， $1/2$ を加える操作が「潰れて」しまう．

そこで，図3 のように，半円に対応させることで複数の曲線によって与えられる．これらの動的な資料は Sage Notebook サーバを通じて閲覧可能である．

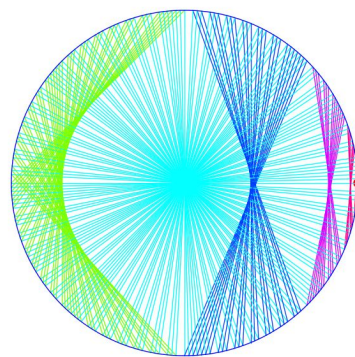


図 2

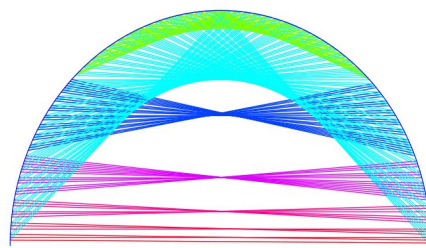


図 3

公開サーバはこれらの資料の公開だけではなく，SageMath の汎用性を活かして，幅広い範囲での数学の研究に寄与できる可能性を秘めたものである．そのような取り組みの一端を担ったという点は，本研究で得られた成果の1つであると言える．

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 0 件)

[学会発表](計 6 件)

青井久 ,Hecke pairs of ergodic measured equivalence relations, 作用素論・作用素環論研究集会, 2014 年 12 月 25 日, 東洋大学白山キャンパス(東京都・文京区)

青井久 , Sage Notebook Server の構築と活用, Sage Days 63, 2014 年 10 月 12 日, 信州大学松本キャンパス(長野県・松本市)

青井久 , 同値関係における通約性, 岐阜数理科学セミナー, 2014 年 7 月 23 日, 岐阜大学(岐阜県・岐阜市)

青井久 , Schlichting completion of Hecke pairs, 日本数学会 2014 年度年会, 2014 年 3 月 17 日, 学習院大学(東京都)

青井久 , 大学における数学教育, 研究のための Sage サーバ運用事例, 数学ソフトウェアとフリードキュメント 18, 2014 年 3 月 14 日, 学習院大学(東京都)

青井久 , KNOPPIX/Math 利用報告-立命館大学数理科学科における活用事例, 数学ソフトウェアとフリードキュメント XIII, 2011 年 9 月 27 日, 信州大学(長野県)

〔その他〕

ホームページ等

Sage Notebook サーバ(情報公開サーバ) :

http://www.math.ritsumei.ac.jp/sage_public/

6 . 研究組織

(1)研究代表者

青井 久 (AOI, Hisashi)

立命館大学・理工学部・准教授

研究者番号 : 90396276