

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 12 日現在

機関番号：34419

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740134

研究課題名(和文)位相的ラドン変換の超局所解析と特異点理論への応用

研究課題名(英文)Microlocal analysis of topological Radon transforms and their application to singularity theory

研究代表者

松井 優 (MATSUI, Yutaka)

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号：10510026

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円、(間接経費) 540,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、集合のオイラー数をその有限加法的測度とする積分論における代数的な背景をもつ構成可能関数の積分変換について研究している。グラスマン多様体間の位相的ラドン変換像は、解析ラドン変換像が偏微分方程式系で特徴付けられるのに対して、グラスマン多様体とその核関数の性質から従う不変量を用いたある種の位相的積分方程式系によって特徴付けられることが明らかとなった。

また、扱う関数を構成可能関数から一般の実数値をとる定義可能関数へと拡張し、そのオイラー数から定義される測度による積分論および積分変換についても研究を行い、良い条件のもとで反転公式を証明した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we study integral transforms of constructible functions, whose integral theory is based on the Euler characteristic. We proved that the images of topological Radon transforms on Grassmann manifolds satisfy a system of topological integral equations. Note that in the analytic case the images satisfy a system of partial differential equations.

We also prove an inversion formula for topological Radon transforms of definable functions, which are more general than constructible functions.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：ラドン変換 グラスマン多様体 構成可能関数 超局所解析

1. 研究開始当初の背景

位相的ラドン変換は、集合のオイラー数をその有限加法的測度とする積分論における、代数的な背景を持つ構成可能関数の幾何学的な積分変換である。研究代表者は、これまでこの位相的ラドン変換について、超局所解析的手法や組み合わせ論的手法を用いて研究を行ってきた。特に、Schapira による先行研究の設定を一般化し、グラスマン多様体間の標準的な核を持つ構成可能関数のラドン変換について、その左逆変換を具体的に構成し、反転公式を証明した。このような幾何学的なラドン変換の反転公式の存在は、ユークリッド空間内のコンパクトな集合を、次元が指定されたアフィン線形部分空間によるその集合の切断面のオイラー数の情報のみから、完全に復元できるという応用がある。これは CT スキャンなどに応用されている解析的ラドン変換と類似の結果である。研究代表者は、このように扱う対象や手法が全く異なるにも関わらず、通常解析的ラドン変換と多くの類似点があることに注目している。また、研究代表者は、双対多様体の幾何学的次数公式の研究などの位相的ラドン変換の特異点理論への応用についても、共同研究により結果を得ている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、グラスマン多様体のみならず、旗多様体やさらには一般の等質空間の間の位相的ラドン変換を定義し、その反転公式、像の特徴づけ、特異点理論への応用に関する研究を行うことである。そのためにも、まず先行研究で考察されていたグラスマン多様体間の位相的ラドン変換について、未解決の問題を解決に取り組むことをはじめの目的とした。さらに、それらの結果の統一的な理解を試み、旗多様体などに設定を一般化を目指した。また、研究の過程で現れる特異多様体についてその性質を明らかにすることも目的とした。

3. 研究の方法

本研究では、計算機による数式処理をも取り入れて、具体例の構成を行うなどの準備的な研究を行い、その数学的構造の発見を試みた。その後、発見した現象を理論的に定式化し、期待される命題の証明に取り組んだ。問題の解決に際しては、解析的ラドン変換の広大な理論に倣い、その類似性に注意した。

4. 研究成果

グラスマン多様体間の構成可能関数の位相的ラドン変換について、先行研究とは異なるさまざまな核関数を持つ変形版の位相的ラドン変換を定義し、その左逆変換を具体的に構成し、反転公式を証明した。研究代表者による先行研究では、2つのグラスマン多様体の直積空間の中でその元である2つの線形部分空間が包含関係を持つ組全体の集合を考え、その集合の特性関数を核関数としたラドン変換について考察し、その左逆変換を具体的に構成し、反転公式を証明した。本研究では、2つのグラスマン多様体の直積空間の中で、共通部分の次元が指定された2つの線形部分空間の組全体の集合を考え、その集合の特性関数を核関数とした変形版の位相的ラドン変換を定義し、その左逆変換を具体的に構成し、反転公式を証明した。変形版の位相的ラドン変換の左逆変換の構成に関しては、先行研究の手法と同様に、ここで考察したさまざまな核関数を持つ位相的ラドン変換の間に成り立つ関係式に注目することが重要であった。すなわち、1つの積分変換のみに注目するのではなく、グラスマン多様体の直積をその交わりの次元で分割し、それに付随した多くの積分変換を同時に考察することが重要であった。また、その左逆変換の構成にはおよび反転公式の証明には、グラスマン多様体におけるシューベルトカリキュラスやヤング図形の組み合わせ論などを用いているが、それらは先行研究よりも複雑な幾何学的考察や計算が必要であり、先行研究の場合が幾何的にも単純な構造をしていたこともわかった。

グラスマン多様体間で、先行研究と同様の、2つのグラスマン多様体の直積空間の中で2つの線形部分空間が包含関係を持つ組全体の集合を考え、その集合の特性関数を核関数とした位相的ラドン変換について、その像を完全に特徴づけすることができた。先行研究では、研究代表者によるグラスマン多様体のシューベルト胞体に付随する特別な構成可能関数の位相的ラドン変換像の特徴づけや、研究代表者と共同研究者による射影空間内の実解析的部分多様体の特性関数の位相的ラドン変換の超局所解析的像の特徴づけが行われていた。また、2つのグラスマン多様体が互いに双対な関係にある場合には、先行研究で構成した左逆変換が右逆変換にもなっており、同型定理ともいふべき性質が研究代表

者により得られていた．今回の研究では，そのような特別な状況に限定することなく，先行研究で得られていたグラスマン多様体間の位相的ラドン変換の左逆変換が具体的に構成できるすべての場合において，その位相的ラドン変換像は与えられた2つのグラスマン多様体の普遍量を用いて記述されるある種の位相的積分方程式系によって完全に特徴づけられることが明らかとなった．すなわち，位相的ラドン変換像はその位相的積分方程式系を満たし，逆にその位相的積分方程式系を満たすグラスマン多様体上の任意の構成可能関数に対して，すでに構成した左逆変換が右逆変換を与えることを証明した．これは2つのグラスマン多様体が互いに双対な関係に先行研究得られていた同型定理の一般化である．位相的ラドン変換と類似の変換である位相的極変換に関しては，位相的積分の性質によりその像を特徴づける Bröcker による先行研究があり，本研究の結果はその類似の結果とすることができる．したがって，本研究の結果は位相的積分変換の自然な像の特徴づけの方法であったと言える．また，解析的ラドン変換の理論では，像は偏微分方程式系で特徴づけられることが知られている．

構成可能関数の一般化である定義可能関数に対して，その位相的ラドン変換を定義し，特別な仮定のもとで，その反転公式を証明した．これまで位相的ラドン変換の理論は構成可能関数を中心に研究が行われていたが，扱う関数を構成可能関数から一般の実数値を取る定義可能関数へと拡張し，その位相的ラドン変換について研究を行った．定義可能関数の集合のオイラー数から定義される測度による位相積分の理論は，Baryshnikov と Ghrist により研究されており，本研究ではその性質を詳しく調べ，積分変換の研究に応用した．定義可能関数の位相積分は，線形性を満たさず，関手の性質も持たず，フビニの定理が一般には成立しないなど，それまでの構成可能関数の位相積分と比べて取り扱いが大変難しい．このような積分理論の下で，位相的ラドン変換に付随した良い三角形分割を持つ定義可能関数のクラスを定義し，そのような定義可能関数に対しては積分変換に付随した位相的積分の順序交換が可能であることを証明した．特に，そのクラスは構成可能関数をすべて含んでおり，また応用を念頭に置いた重要な具体的な設定においては，構成可能関数よりも真に広

いクラスを与えている．またその応用として，Schapira による先行研究と同様の設定の下で位相的ラドン変換の左逆変換を構成し，良い定義可能関数のクラスに対して反転公式を証明した．今回の結果は，位相的ラドン変換で取り扱う関数を構成可能関数から拡張する最初の試みであり，今後その設定をさらに一般化して，グラスマン多様体間や旗多様体などにおける定義可能関数の位相的ラドン変換に対して，その反転公式や，像の特徴づけを行うことが重要になると考えられる．

構成可能関数の位相的ラドン変換について，多様体の設定をグラスマン多様体から一般の旗多様体へと拡張し，その左逆変換の具体的な構成，反転公式の証明，変換像の特徴づけを行うべく，次元が小さい場合の具体的な状況において予備的な考察や具体例の計算を行った．本研究の目的は，それらの一般化であったが，現時点ではその課題については，理論および計算上の困難からその解決には至っていない．今後も引き続き研究を行っていく．

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計6件)

- (1) N. Hayashi and Y. Matsui, Decomposition formulae for generalized hypergeometric functions with the Gauss-Kummer identity, Commun. Korean Math. Soc. 29 (2014), No.1, pp.97-108. (査読有)
- (2) Y. Matsui and K. Takeuchi, Monodromy at infinity of polynomial maps and Newton polyhedra (with Appendix by C. Sabbah), IMRN, pp.1691-1746, 2013. (査読有)
- (3) 竹内 潔, 松井 優, 多項式写像と A-超幾何関数の無限遠点におけるモノドロミー, 数学, 第 64 巻第 3 号, 225-253, 2012 年 7 月. (査読有)
- (4) Y. Matsui and K. Takeuchi, Milnor fibers over singular toric varieties and nearby cycle sheaves, Tohoku Math. J., Vol.63, pp.113-136, 2011. (査読有)
- (5) Y. Matsui and K. Takeuchi, Monodromy at infinity, Newton polyhedral

and constructible sheaves, Mathematische Zeitschrift, Vol.268, (1), pp.409-439, 2011. (査読有)

- (6) Y. Matsui, Topological Radon transforms with modified kernels on Grassmann manifolds, RIMS 講究録 実閉体上の幾何と特異点論への応用 1764, pp.59-69, 2011. (査読無)

[学会発表] (計 7 件)

- (1) Y. Matsui, Topological Radon transforms and their applications, RIMS 研究集会 Exponential analysis of differential equations and related topics, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 10 月 16 日 .
- (2) Y. Matsui, Topological Radon transforms on Grassmann manifolds, The 5th Australian-Japanese workshop on Real and Complex Singularities, The University of Sydney, 2013 年 9 月 11 日 .
- (3) Y. Matsui, Topological Radon transforms and their applications, Several Aspects of Algebraic Analysis, 日本大学, 2013 年 3 月 16 日 .
- (4) Y. Matsui, Topological Radon transforms and their applications, Microlocal Analysis, Differential Equations and Related topics, 東京大学, 2012 年 8 月 3 日 .
- (5) Y. Matsui, Topological Radon transforms and their applications, 幾何セミナー, 大阪大学, 2012 年 2 月 20 日 .
- (6) Y. Matsui, Topological Radon transforms and their applications, 代数幾何セミナー, 京都大学, 2012 年 1 月 27 日 .
- (7) Y. Matsui, Topological Radon transforms and their applications, Geometric Analysis on Euclidean and Homogeneous Spaces, Tufts university, 2012 年 1 月 8 日 .

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

松井 優 (MATSUI, Yutaka)
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号 : 10510026