様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４０１９７
研究課題名（和文）数値計算で探る超対称ゲージ理論の非摂動構造

研究課題名（英文）Research of the nonperturbative structure of supersymmetric gauge theoies via numerical simulation

研究代表者
松浦　壮（MATSUURA, So）

慶應義塾大学・商学部・准教授

研究者番号：７０３９２１２３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：最近の超弦理論の研究から、超対称性を持つゲージ理論（超対称ゲージ理論）が初期宇宙や量子重力理論といった問題にアプローチするために鍵となることが明らかになりつつある。本研究は、この成果を受け、超対称ゲージ理論を数値的に調べるための方法論を確立することを目的として行われた。
本研究によって、２次元超対称ゲージ理論の数値計算のために構築されたアルゴリズムの中でも、特に杉野模型が有用であることが明らかとなった。そして、杉野模型が本来持っていた、非物理的な真空を多数持つという欠点がエレガントな方法で解消され、数値計算に基づいた超対称ゲージの研究の基礎を築くことに成功した。

研究成果の概要（英文）：Recent study on superstring theory has made it clear that supersymmetric gauge theories are key to approach to problems of early universe and quantum gravity. We have thus carried out our research in order to establish a way to study the supersymmetric gauge theories numerically.
As a result, we specified that the so called Sugino model is the most useful algorithm to simulate the supersymmetric gauge theories. The original Sugion model has an undesirable property that there exists many degenerated unphysical vacua. We solved this problem in an elegant way and established a foundation to study supersymmetric gauge theories in numerical way.

研究分野：素粒子論

キーワード：超対称性　数値計算　格子ゲージ理論　行列模型

１．研究開始当初の背景

超対称ゲージ理論は、現在の素粒子物理学の様々な場面で重要な役割を果たしている。まず超対称性は、時空が持っている並進対称性の自然な拡張になっており、単なる仮説ではなく、素粒子間の相互作用を本質的なレベルで支配していると考えられている。実際、超対称性を仮定すると、重力を除く３つの相互作用の結合定数が高エネルギー領域で自然に統一されることが分かっており、超対称性は次世代の素粒子現象論を構築する上で中心的なテーマの一つになっている。

一方で、超対称ゲージ理論は超弦理論と相性が良く、その立場からも精力的に研究が行われている。その中でも特に重要な成果は、いわゆる「ゲージ／重力対応」の発見である。典型的な例は、４次元 N=４超対称ヤン・ミルズ理論と AdS 時空上の超重力理論の間に成り立つ対応で、これによって、例えばブラックホールの微視的な性質をゲージ理論の立場から調べるといった研究が可能になり、重力相互作用とゲージ相互作用の双方の理解を大きく前進させた(1)。

従来、超対称ゲージ理論を非摂動的に研究する際に主に用いられてきたのは、超対称性の代数によって要請される、理論に対する強い縛りである。超対称性の代数を用いると、ある種の物理量に関しては数学的に厳密な取り扱いをすることができる。この方法は、超対称性を持たないゲージ理論にはない強力な研究方法ではあるが、超対称性の代数に守られたごく一部の物理量にしか適用できないという欠点がある。理論のダイナミカルな振る舞いを、摂動論の限界を超えて調べるためには、量子色力学（QCD）に対して格子 QCD がそうであったように、理論そのものを有限自由度の統計系によって正則化する必要がある。もしそれが可能になれば、原理的にはあらゆる物理量を摂動論に頼らずに計算できるようになり、超対称ゲージ理論の理解は飛躍的に進展すると期待される。

研究開始当時、１次元、２次元といった低次元の超対称ゲージ理論に関しては、QCD と同様、時空を格子で近似する方法がうまくいくことが分かり、複数の研究グループによって独立に格子上の理論が提案されていた(2)。

さらに、格子を使わない方法として、非可換球面と呼ばれる行列配位の周りで行列理論を展開すると、２次元非可換球面上の場の理論を正則化出来ることが知られていた(3)。

２．研究の目的

以上の背景を踏まえて、我々は、上で述べた格子理論と行列理論を組み合わせるやり方で４次元 N=４超対称ヤン・ミルズ理論を正則化出来るのではないかという着想を得た。すなわち、４次元の時空の全てを同じやり方で正則化するのではなく、２次元は格子を用いて、残りの２次元は行列の自由度を使って正則化する、という発想である。行列正則化は、格子正則化と違い、超対称性との相性が良く、理論の紫外部分の構造を変えないという非常に良い性質がある。そのため、４次元理論の正則化でいつも問題になる、連続極限を取る際の微調整が必要なくなる可能性がある。非可換球面を解として持つような２次元格子理論を具体的に構築し、実際に格子と行列の両方で正則化された４次元 N=４超対称ヤン・ミルズ理論を構成することが最初の目標となる。

そして、４次元理論を調べる前に、行列正則化を行う前の２次元格子理論を理論とシミュレーションの両方から調査する事が次の目標である。上記のように、行列正則化を施すためには、その土台になる理論として２次元格子理論が必要になり、実際の数値計算を行う際には、非可換球面解の回りでのモンテカルロ・シミュレーションを実行することになる。従って、変形する前の格子理論として出来るだけ性質の良いものを選ぶことが、４次元理論を効率的に調べる一つの鍵になる。不必要な発散が出ない事を摂動論で調べるのはもちろん、数値計算を実行するために必要なコントロールパラメータの数や、連続理論に近づく速さ等を調べ、４次元理論を調べるための最適な理論を選択する。

その上で４次元理論を実現するための変形を施し、厳密な結果が分かっている物理量を数値計算で再現すると共に、ゲージ／重力対応の非自明な検証を行うことが最終的な目標である。

３．研究の方法

格子と行列の両方で正則化された４次元 N=４超対称ヤン・ミルズ理論を作るためには、同じ数の超対称性を持つ２次元Ｎ=(8,8)超対称ヤン・ミルズ理論を格子正則化する必要がある。そのような格子理論は、格子の各点に行列が配置された、広い意味で行列理論になっている。従って、非可換球面を解として持つような変形を施すことが出来れば、(3)の議論がそのまま適用でき、２次元を格子で、残り２次元を非可換球面で正則化した４次元理論が出来上がることが期待される。

２次元Ｎ=(8,8)超対称ヤン・ミルズ理論を超対称性の一部を保ちながら格子正則化する方法には、大きく分けて、CKKU 理論と杉野理論の２種類が知られているが、ポイントは、これらの理論に超対称性を保ちながら適切な変形を施せるか、という点である。その点を精査し、連続極限を取る際に困難が無いかどうかを調べて行く。

続いて、４次元Ｎ=４超対称ヤン・ミルズ理論を正則化する方法の中で最も数値計算に適した２次元格子理論を選び出す。上述の CKKU 理論と杉野理論は一長一短である。CKKU 理論が比較的単純な構造を持つためにプログラムの作成が容易な反面、ゲージ群として SU(N)ではなく U(N)しか取ることが出来ないという欠点が指摘されていた。一方杉野理論

は、ゲージ群として SU(N)を採用できる反面、非物理的な真空を排除するための特殊な仕組みを導入しなければならない関係で、プログラムが複雑になることが数値計算を阻んでいた。これらの長所と短所が実際の数値計算でどのように現れるか検証し、４次元理論の数値計算に必要な理論を見極める。

その上で、選択した理論に４次元理論を実現するための変形を施して数値計算を実行し、数学的に厳密に計算できる物理量を数値計算によって再現することを目指す。これはプログラムにつきもののバグを取り除くために必ず必要な作業である。そのようなチェックをくぐり抜けた後、数学的に厳密に計算できない物理量、もしくは、完全に結果が分かっていない物理量を数値計算によって評価することで、ゲージ／重力対応の非自明なチェックを行う。

４．研究成果

最初に我々は、格子理論として杉野理論を用いて、超対称性を保ったままで非可換球面を実現するような変形が施せる事を見いだした。また、同様の変形が CKKU 理論に対しても可能である事も共同研究者である花田の解析で明らかにされた(4)。

続いて、プログラムの作成が比較的容易な CKKU 理論を詳細に調べた。

我々はまず、この方法で４次元時空が実現されることを理論的に確かめるために、非可換球面が実現されるように変形されて理論に対して摂動計算を行い、4 次元時空の生成を阻むような発散が出ないことを確かめた。

続いて、変形を施す前の 2 次元 N=(8,8)超対称ヤン･ミルズ理論を CKKU 法を用いて正則化し、実際に数値計算を行った。この理論では、スカラー場の平坦方向をコントロールする必要がある。さらに CKKU 理論は U(1)モードを含んでおり、格子間隔を固定するために大きな質量項が必要である。同時に、この理論はフェルミオンにゼロモードを含んでいるため、数値計算を行うためにはこれも正則化する必要がある。我々は、これらの項をコントロールしながらシミュレーションを行い、超対称性から予言される物理量を数値計算からも正確に再現した。また、連続極限において U(1)モードが分離されている事も確かめた。

最終的に、この数値計算からもっともらしい結果を得ることが出来たが、上記の通り CKKU 理論は制御変数の数が多く、目標の結果を得るための作業が煩雑である。これをそのまま４次元理論の解析に用いるのは非常に困難であると言わざるを得ない。そこで、当初の研究計画通り、より制御変数の数が少ない杉野理論の考察を行った。杉野理論ではゲージ群を SU(N)に選べるため、CKKU 理論特有の、U(1)モードに付随する問題は生じない。一方、素朴に構成した杉野理論では、物理的でない多数の真空が縮退している。これを回避するために、リンク変数に「許容条件」と呼ばれる制限を設ける処方箋が提案されたが、この条件はプログラムを非常に煩雑にするため、数値計算の足かせになっていた。

そこで我々は、許容条件を課すこと無く、真空の縮退を取り除く方法を開発した。これによって杉野理論の最大の障害が取り除かれた。CKKU 理論が当初の予想以上に複雑であったために、期間内に４次元理論の数値計算に辿り着けなかったのは残念ではあるが、4 次元理論の数値計算を行うための最適な格子理論を、実質的に杉野理論に一本化することが出来た。これは将来に繋がる重要な成果である。

もう一つの成果は、杉野理論を拡張し、任意のリーマン面上の杉野理論を正則化する方法を確立した事である。これまで、杉野理論は２次元正方格子の上に定義されており、そのトポロジーもトーラスに限られていた。我々は、正方格子を任意の２次元単体分割に置き換えても杉野理論を作ることが出来ることを見出した。トーラス以外のリーマン面の場合、連続理論は位相的場の理論になるが、位相的な性質を保ちながら２次元超対称場の理論を正則化した例は他にない。実際、正則化した理論に局所化と呼ばれる手法を適用することで、２次元空間の位相的な性質が格子理論から取り出せることも示された。これは、場の理論の局所化、という数学のテーマに正則化の手続きを与える事にも繋がる成果である。

（参考文献）

(1) J.M.Maldacena, Adv.Theor.Math.Phys.2:231, 1999

(2) A.G.Cohen, D.B.Kaplan, E.Katz, M.Unsal, JHEP 0308:024, 2003, JHEP 0312:031, 2003: F. Sugino, JHEP 0401:015,2004: S. Catterall, JHEP 0411:006,2004: A. D’Adda, I. Kanamori, N. Kawamoto, K. Nagata, Phys.Lett. B633:645, 2006.

(3) S. Iso, Y. Kimura, K. Tanaka and K. Wakatsuki, Nucl.Phys.B604:121, 2001: Juan Maldacena, Mohammad M. Sheikh-Jabbari, Mark Van Raamsdonk, JHEP 0301:038,2003

(4) Masanori Hanada, JHEP 1011 (2010) 112

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① <u>So Matsuura</u>, Tatsuhiro Misumi, Kazutoshi Ohta, ”Exact Results in Discretized Gauge Theories”, PTEP 2015 (2015) 3, 033B07 ,査読有り

② <u>So Matsuura</u>, Tatsuhiro Misumi, Kazutoshi Ohta,”Topologically twisted N = (2, 2) supersymmetric Yang-Mills theory on an arbitrary discretized Riemann surface”, PTEP

2014 (2014) 12, 123B01,査読有り

③ So Matsuura, Fumihiko Sugino, "Lattice formulation for 2d = (2, 2), (4, 4) super Yang-Mills theories without admissibility conditions", JHEP 1404 (2014) 088, 査読有り

④ Masanori Hanada, So Matsuura, Fumihiko Sugino, "Non-perturbative construction of 2D and 4D supersymmetric Yang-Mills theories with 8 supercharges", Nucl.Phys. B857 (2012) 335-361, 査読有り

⑤ Masanori Hanada, So Matsuura, Jun Nishimura, Daniel Robles-Llana, "Nonperturbative studies of supersymmetric matrix quantum mechanics with 4 and 8 supercharges at finite temperature", JHEP 1102 (2011) 060, 査読有り

⑥ Masanori Hanada, So Matsuura Fumihiko Sugino, "Two-dimensional lattice for four-dimensional N=4 supersymmetric Yang-Mills", Prog.Theor.Phys.126(2011) 597-611, 査読有り

〔学会発表〕（計６件）

① 松浦壮, "任意の単体分割上の超対称ゲージ理論の構成", 研究会「離散的手法による場と時空のダイナミクス 2014」, 慶應義塾大学　日吉キャンパス

② 松浦壮, 花田政範, "数値計算に基づく 2 次元 N=(8,8)超対称ヤン・ミルズ理論の解析", 日本物理学会 2013 年秋季大会, 2013 年 9 月 20 日, 高知大学朝倉キャンパス（高知市）

③ 松浦壮, 三角樹弘, 太田和俊, "Exact Results in Supersymmetric Lattice Gauge Theories", 日本物理学会第69回年次大会, 2013 年 11 月 22 日 東海大学湘南キャンパス（神奈川県平塚市）

④ So Matsuura, "Hybrid Discretization of 4D N=4 SYM", KITP program: Novel Numerical Methods for Strongly Coupled Quantum Field Theory and Quantum Gravity, 2012 年 1 月 27 日, Kavli Institute for Theoretical Physics （Santa Barbara, United States of America）

⑤ 松浦壮 "2 次元 N=(8,8)超対称ヤン・ミルズ理論の数値シミュレーションに関する報告", 日本物理学会 第 67 回年次大会, 2012 年 3 月 26 日, 関西学院大学 （兵庫県西宮市）

⑥ 松浦壮 "行列正則化した4次元N=4超対称ヤン・ミルズ理論の量子補正について" 日本物理学会 2011 年秋季大会 2011 年 9 月 18 日 弘前大学 (青森県弘前市)

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者

松浦　壮（MATSUURA,So）

慶應義塾大学・商学部・准教授

研究者番号：70392123

(2)研究分担者

(3)連携研究者