

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 10 日現在

機関番号：13601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2011～2012

課題番号：23840015

研究課題名（和文） 配置空間積分、オペラッド、関手の微積分による埋め込みの空間のトポロジーの研究

研究課題名（英文） Topology of the embedding spaces via configuration space integrals, operads and the calculus of functors

研究代表者

境 圭一 (SAKAI KEIICHI)

信州大学・理学部・助教

研究者番号：20466824

研究成果の概要（和文）：球面の埋め込みのなす空間の位相幾何学的な性質についての研究を継続した。「はめ込みを法とした埋め込みのなす空間」と呼ばれる空間 fE について、 fE が位相的 Stiefel 多様体の多重ループ空間であることを示した。応用として以下の結果を得た。

- (1) fE のホモロジー群に BV 代数の構造を導入した。
- (2) 「スピニング」という埋め込みに対する操作が異なる次元の埋め込みの空間の低次ホモトピー群に同型を誘導する事実があるが、これを位相的 Stiefel 多様体の言葉で書き直して別証明を与えた。

研究成果の概要（英文）：I continued the study of the spaces of embedding between spheres. I showed that the space fE called “the space of embeddings modulo immersions” is an iterated loop space of the topological Stiefel manifold. As applications I obtained;

- (1) A BV-algebra structure on the homology of fE ,
- (2) An alternative proof in terms of topological Stiefel manifolds of the fact that the “spinning” operation gives rise to an isomorphism of the lower dimensional homotopy groups of the embedding spaces.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2011 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2012 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：埋め込みの空間，グラフ，オペラッド，位相的 Stiefel 多様体，ストリング・トポロジー，BV 代数，Hochschild ホモロジー

1. 研究開始当初の背景

多様体の埋め込みの空間の位相幾何学的な性質は、結び目や 3 次元多様体の有限型不変

量やストリング・トポロジー，微分同相群などとの関連があり，特に (コ) ホモロジー群の代数構造についての理解は重要であると考えられる．研究代表者はこのような観点から埋め込みの空間を研究しており，本研究においても埋め込みの空間の研究を継続した．

2. 研究の目的

多様体，特に球面の埋め込みのなす空間の位相幾何学的な性質を，代数的/幾何学的トポロジーの様々な手法を用いて調べることを目的とした．特に1次元ならびに高次元の埋め込み・はめ込みの分類，結び目のVassiliev不変量の幾何学的・組み合わせ的な性質，(自由) ループ空間のトポロジー (ストリング・トポロジー) との関連などを明らかにすることを目指した．

3. 研究の方法

結び目の Vassiliev 不変量を，埋め込みの空間のコホモロジー類として構成するには，グラフに付随した配置空間上の積分による方法が有効である．グラフのなす空間の代数構造を調べることで，埋め込みの空間のコホモロジー群の構造を調べることができる．その際に，埋め込みの空間へのオペラッドの作用が導く (コ) ホモロジー作用素を使うことで，より深い代数構造を見出すことができる．ループ空間のストリング・トポロジーにおけるホモロジー作用素もオペラッドの作用と関わることを思い起こすと，オペラッドを使うことは埋め込みの空間上でのストリング・トポロジーを展開する上でも有効な方法であると考えられる．

4. 研究成果

枠つき long knot と呼ばれる 1次元の埋め込みの空間について，幾何学的方法により，そのホモロジー群上に BV 代数の構造を定義

した．その方法は Chas-Sullivan による自由ループ空間のホモロジー群上の BV 代数構造の埋め込み版と呼べるものである．BV 代数構造の一部である Gerstenhaber 代数構造としては過去に Budney によりオペラッドの作用を用いて構成されたものを採用し，鍵となる BV 作用素については Hatcher による S^1 作用がその役割を果たすことを見出した．また，研究代表者が過去に示した Gerstenhaber 代数構造の非自明性と，Gerstenhaber 作用素と BV 作用素がみたす関係式とを応用して，今回導入した BV 作用素が非自明であることを示した．

次に，上記の BV 代数構造が入る理由を，ホモトピー論的な立場から考察した．球面の埋め込みのなす空間 E から はめ込みのなす空間への自然な包含写像を考え，そのホモトピーファイバーを fE とする (はめ込みを法とした埋め込みの空間と呼ばれている)． fE が多重ループ空間のホモトピー型を持つことは以前から知られていたが，より詳しく， fE が位相的 Stiefel 多様体の多重ループ空間であることを示した．証明には Lashof の考察を使った．さらに， E も位相的 Stiefel 多様体に関連する空間の多重ループ空間であることを示した．このような “delooping” は 1次元の long knot の空間の場合については知られていたが，私の結果はより一般の次元に適用される．これは Morlet-Burghel-Lashof による微分同相群のホモトピー型に関する結果の類似である．応用として以下の結果を得た．

(1) 位相的 Stiefel 多様体には直交群が作用することをを使い，Salvatore-Wahl のループ空間認識定理 (の枠つき版) を使って， fE に枠つき小球のなすオペラッドが作用し，帰結として fE のホモロジー群に BV 代数の構造が入ることを示した．

(2) "spinning"という操作によって、異なる次元の埋め込みの空間（のループ空間）の間に写像が定義される。この写像は低い次元のホモトピー群に同型を誘導することが知られており、証明には関手の微積分を要していたが、私の結果により、位相的Stiefel多様体のホモトピー群を使った別証明を与えた。

埋め込みの空間のホモロジー群に BV 代数構造が入るもう一つの理由として、ホモロジー群に収束するスペクトル系列の E^2 項に注目した。関手の微積分の応用として、この E^2 項は小球のなすオペラッドのホモロジーオペラッドに付随する Hochschild ホモロジーに一致する。Hochschild ホモロジー上の BV 代数構造については Tradler による研究があったが、私はそれを今の状況に適用できるように拡張した。具体的には Tradler の BV 代数構造の次数つき版を構成した。このスペクトル系列は有理数上では E^2 項で退化することがわかっているので、 fE のホモロジー群（の次数商）上に BV 代数構造が入ることになる。この構成は純粋に代数的であり、上記の幾何学的な構成との関係を明らかにすることは今後の課題である。

埋め込みの空間のコホモロジーと有限型不変量との関連については、渡邊忠之氏との共同研究で、高次元埋め込みの空間の新たなコホモロジー類をグラフに付随した配置空間上の積分で表す方法を考えた。この共同研究は長期に渡っていたが、一区切りをつけて論文を発表した。この論文の中では、これまでより幅広い次元、ならびに多くのグラフからコホモロジー類を取り出すことに成功し、その中の幾つかは非自明であることも証明できた。それに関連して、いくつかの種類のグラフの空間の構造も明らかになった。

今後は、本研究により導入された BV 代数構造の非自明性などを調べることにより、埋め

込みの空間のホモトピー論的な性質を代数的な言葉で調べることが可能になる。また BV 代数構造がグラフの空間にどのような代数構造として反映するかは知られておらず、それがわかればグラフによる有限型不変量の表示に際しても有益であると思われる。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

①Keiichi Sakai, Tadayuki Watanabe, 1-loop graphs and configuration space integral for embedding spaces, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, volume 152 (May 2012), pp. 497-533, 査読有
DOI: 10.1017/S0305004111000429

〔学会発表〕（計 5 件）

①境圭一, 結び目の種数を減らすある変形について, Spring Workshop 2013 on Low-Dimensional Topology and its Ramifications, 名城大学名駅サテライト, 2013年3月2日

②境圭一, 枠つき long embedding の空間の delooping について, 幾何学セミナー, 首都大学東京, 2013年1月11日

③境圭一, BV structures on the homology of the framed long embedding spaces, 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2012年9月11日

④境圭一, Embedding spaces and string topology, 講演会, 東京大学大学院数理科学研究科, 2012年5月8日

⑤Keiichi Sakai, BV-structures on the homology of the framed long knot space, 4th East Asian Conference on Algebraic Topology, 東京大学大学院数理科学研究科, 2011年12月9日

[その他]
ホームページ等
http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/index_j.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

境 圭一 (SAKAI KEIICHI)
信州大学・理学部・助教
研究者番号：20466824

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：