

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 24 日現在

機関番号：15401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2011 ～ 2012

課題番号：23840027

研究課題名（和文） ハンドル分解と 4 次元多様体の微分構造

研究課題名（英文） Handle decompositions and smooth structures on 4-manifolds

研究代表者

安井 弘一 (YASUI KOUICHI)

広島大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：70547009

研究成果の概要（和文）：

4 次元多様体の微分構造を、ハンドル分解の図式を主に用いて研究した。主な成果は以下の (1)~(3) である。なお、(2), (3) は Selman Akbulut 氏（ミシガン州立大学）との共同研究である。(1) 広いクラスの 3 次元多様体が 4 次元多様体であって無限個のエキゾチック微分構造を持つものの境界として実現できることを示した。(2) Gluck 手術が微分構造を変えない為の新しい十分条件を与えた。(3) 互いに同相だが微分同相でない $b_2=2$ の単連結 Stein 4 次元多様体であって、同一の接触 3 次元多様体を境界に持つものを構成した。

研究成果の概要（英文）：The principal investigator studied smooth structures on 4-manifolds, using the diagrams of their handle decompositions. The main results are the following (1) - (3). The results (2) and (3) are joint works with Selman Akbulut (Michigan State University). (1) The principal investigator proved that a large class of 3-manifold bounds a 4-manifold which has infinitely many exotic smooth structures. (2) We gave a new sufficient condition under which a Gluck twist to a 4-manifold with odd intersection form does not change the smooth structure. (3) We constructed infinitely many simply connected Stein 4-manifolds with $b_2=2$ that are mutually exotic. Moreover, they are Stein fillings of the same contact 3-manifold.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|---------|-----------|---------|-----------|
| 2011 年度 | 1,300,000 | 390,000 | 1,690,000 |
| 2012 年度 | 1,200,000 | 360,000 | 1,560,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 2,500,000 | 750,000 | 3,250,000 |

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：トポロジー、4 次元多様体、微分構造、ハンドル分解、コルク、Stein 多様体、接触構造

1. 研究開始当初の背景

本研究の主対象は 4 次元多様体の微分構造である。4 次元多様体の微分構造の研究は 1980 年代の Freedman 理論と Donaldson によ

るゲージ理論の登場によって劇的な進展を遂げた。しかし、5 次元以上の高次元や 3 次元以下の低次元と違い、4 次元の微分構造は未だに全体の様相が捉えられず、様々な具体

例が依然として必要とされている。特に可微分4次元多様体に対し、その(無限個の)エキゾチック(即ち同相だが微分同相でない)微分構造を構成する研究が、Fintushel-Stern, Park, Akhmedovら大勢の研究者によって盛んになされている。

4次元多様体の微分構造はハンドル分解を経由することで図示できる。その図式をハンドル体図式(Kirby図式)という。ハンドル体図式は全ての4次元多様体を図示できるという点に強みがあり、微分構造の研究の強力な道具である。

研究代表者はこれまでハンドル分解・ハンドル体とその図式を用いて主に4次元多様体の微分構造の構成的研究に取り組んできた。具体的には以下で詳細する、1, 3ハンドルの必要性の問題の研究とコルクの研究を主に進めてきた。

・1, 3ハンドルの必要性の問題について。

全ての単連結閉4次元多様体は1, 3ハンドルのないハンドル分解を持つか?という問題は、エキゾチック4次元球面の存在問題など、4次元多様体のエキゾチック微分構造の存在問題に密接に関係している。1, 3ハンドルの問題に対しては、Harer-Kas-KirbyやGompfらによる先駆的研究が1990年頃までになされた。この問題はその後長い間手つかずのまま残っていたが、研究代表者の修士論文を2007年にarXivで公表したのをきっかけに、再びこの問題に注目が集まるようになった。

・コルクについて。

1990年代後半のMatveyevらの研究により、単連結閉4次元多様体の全てのエキゾチック微分構造はコルクと呼ばれる可縮な部分多様体によって決定されていることが示された。しかし、微分構造とコルクの具体的な対応はわかっていない。コルク及びコルク構造の具体例については1990年代のAkbulut, Bizaca-Gompf, Akbulut-Matveyevらの先駆的研究があったが、散発的な例のみであった。そこで、2007年に研究代表者とSelman Akbulut氏(ミシガン州立大学)はコルクに関する組織的な研究を共同で開始し、これまでに様々な具体例の構成や応用の研究を行った。

2. 研究の目的

本研究の大きな目的は多様な具体例の構成によって4次元多様体の微分構造の様相を探ることである。

本研究の申請時の具体的研究目的として、コルクの多角的な研究、1, 3ハンドルの必要性に関する研究、4次元多様体の構成の結び目理論への応用、の3つを設定していた。後者2つの研究については残念ながら発表できるような成果は得られなかった。しかし、コ

ルクの研究から派生した新たな課題(エキゾチック微分構造の構成やプラグの応用に関するもの)に取り組み、研究成果を得ることができた。これらの新たな具体的目的は申請時の大きな研究目的に沿ったものである。

3. 研究の方法

4次元多様体のハンドル分解やコルク、プラグ、Stein多様体を用いて構成を行い、ゲージ理論による微分構造への制約(特に埋め込まれた曲面の種数に関するadjunction不等式)を用いて微分構造を区別する、という手法を主に用いた。

微分構造の研究に関する情報交換を行うため、国内外の研究集会に参加・講演した。特に、微分構造の研究が盛んなアメリカ等の海外の研究集会に積極的に参加・講演した。ドイツのOberwolfach数学研究所に滞在した際に、Chris Wendl氏(ユニヴァーシティ・カレッジ・ロンドン)から教えて頂いた接触構造に関する情報は、下記の研究(4)を進める上で非常に重要な役割を果たした。

また、アメリカのミシガン州立大学を訪問し、Akbulut氏と共同研究を行った。

4. 研究成果

(1) 既約性の観点からコルクの研究を進め、いくつかの成果を得た。この結果をさらに進展させ、近いうちに論文として公表するつもりである。

また、2010年に公表したコルクに関する2編の論文(Akbulut氏との共著)の推敲を重ねた結果、2012年、2013年にそれぞれJournal of Gokova Geometry Topology及びJournal of Differential Geometryから論文が出版された。これらの論文では、Stein多様体を用いたコルク構造の量産法、エキゾチック微分構造の組織的構成法、エキゾチック埋め込みの組織的構成法、などの結果を与えた。以上の結果はいずれも微分構造の研究への更なる応用が期待される。

(2) 4次元多様体の微分構造の違いを見る1つの方法に種数関数がある。ゲージ理論により、適当な条件の下では4次元多様体の種数関数はadjunction不等式を使って評価できることがよく知られており、 $b_2=1$ の場合には非常に有効である。しかし、 $b_2>1$ の場合には、4次元多様体の位相的写像類群の複雑さのため、種数関数の違いを見るには交叉形式の自己同型を全て考慮に入れる必要がある。そのため種数関数の違いを見るのは代数的に非常に困難である。

そこで研究代表者はadjunction不等式と相性の良い、相対種数関数という関数を定義し、 $b_2>1$ の場合に種数を用いて微分構造を区別する技術的方法を与えた。特に応用として、

全ての Stein fillable な 3 次元多様体が 4 次元多様体であって無限個のエキゾチック微分構造を持つものの境界として実現できることを示した。

また、関連する話題として、適当な条件の下では 4 次元多様体に対して重複度が 1 より大きい対数変換を施したものは Stein 構造を持たないことを示した。特に Gompf 核の非自明な対数変換は Stein 構造を持たないことが従う。

さらにこれらの結果を応用して、位相型に関して広範囲の 4 次元多様体が無限個のエキゾチック微分構造であって Stein 構造を許容しないものを持つことを示した。

以上の結果は下記のプレプリントにまとめ、arXiv でインターネット上に公表している：K. Yasui, Nuclei and exotic 4-manifolds, arXiv:1111.0620 (2011).

(3) (Akbulut 氏との共同研究) Gluck ツイストが 4 次元多様体 (特に 4 次元球面) の微分構造を変えるか否かという問題はよく知られている。我々は Gluck ツイストとプラグツイストの関係を用いることで、交叉形式が奇数型の 4 次元多様体の Gluck ツイストが微分構造を変えないための新しい十分条件を与えた。また、その条件の外で Gluck ツイストがエキゾチック微分構造を生む例が存在することを指摘した。

以上の結果は下記のプレプリントにまとめ、arXiv でインターネット上に公表している：S. Akbulut and K. Yasui, Gluck twisting 4-manifolds with odd intersection form, arXiv:1205.6038 (2012).

(4) (Akbulut 氏との共同研究) Eliashberg らの研究により、いくつかの接触 3 次元多様体に対し、それを境界に持つ Stein 4 次元多様体 (Stein filling) の微分構造の一意性が知られている。そのため 4 次元トポロジーの観点からは互いにエキゾチックな Stein 4 次元多様体の存在問題が興味深い。2008 年に Akhmedov-Etnyre-Mark-Smith は互いにエキゾチックな無限個の単連結 Stein 4 次元多様体であって、同一の接触 3 次元多様体を境界に持つものの例を構成した。彼らの例は第 2 ベッチ数 b_2 の値が大きい、4 次元トポロジーの観点からは、微分構造の自由度が低い、 b_2 が小さい値の場合がより興味深い。

そこで我々は対数変換を用いて $b_2=2$ の場合に Akhmedov らの例と同様の性質を持つ無限個の単連結 Stein 4 次元多様体を構成した。我々の例は現時点で b_2 が最小の例となっている。我々の構成にはハンドル体図式を用いており、Akhmedov らによる Lefschetz fibration の knot surgery を用いた構成とは全く異なる。

以上の結果は下記のプレプリントにまとめ、arXiv でインターネット上に公表している：S. Akbulut and K. Yasui, Infinitely many small exotic Stein fillings, arXiv:1208.1053 (2012).

なお、我々の構成法には独自の利点があるため、今後もさらに研究を進める予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

1. Selman Akbulut and Kouichi Yasui, Cork twisting exotic Stein 4-manifolds, Journal of Differential Geometry 93 (2013), no. 1, 1-36, 査読有り.
<http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&page=toc&handle=euclid.jdg/1357141504>

2. Selman Akbulut and Kouichi Yasui, Stein 4-manifolds and corks, Journal of Gokova Geometry Topology 6 (2012), 58-79, 査読有り.
<http://gokovagt.org/journal/2012/index.html>

[学会発表] (計 15 件)

1. 安井弘一, Corks and exotic 4-manifolds, 日本数学会 2013 年度年会 (特別講演), 京都大学, 2013 年 3 月 21 日.

2. Kouichi Yasui, Nuclei, exotic Stein fillings and exotic S^2 -links, FRG Topology Workshop 2013 Topology and Invariants of Smooth 4-manifolds, The Savoy Hotel, Miami (アメリカ), 2013 年 3 月 14 日.

3. 安井弘一, Exotic S^2 -knots and Gluck twists, 研究集会「4 次元トポロジー」, 広島大学, 2012 年 11 月 15 日.

4. 安井弘一, Gluck twisting 4-manifolds with odd intersection form, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会 (一般講演), 九州大学, 2012 年 9 月 18 日.

5. Kouichi Yasui, Corks and exotic 4-manifolds, Conference on Holomorphic Curves and Low Dimensional Topology, Stanford University (アメリカ), 2012 年 8 月 9 日.

6. Kouichi Yasui, Cork twisting exotic Stein 4-manifolds, Invariants in

Low-Dimensional Topology and Knot Theory,
the Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach (ドイツ), 2012年6月5日.

7. Kouichi Yasui, Nuclei and exotic
4-manifolds, FRG Workshop 2012 Topology
and Invariants of Smooth 4-manifolds, The
Mutiny Hotel, Miami (アメリカ), 2012年3
月14日.

8. Kouichi Yasui, Nuclei and exotic
4-manifolds, The 8th East Asian School of
Knots and Related Topics, Korea Advanced
Institute of Science and Technology (韓
国), 2012年1月9日.

9. 安井弘一, 4次元多様体の微分構造と閉曲
面の種数, 近畿大学数学講演会, 近畿大学,
2011年12月1日.

10. 安井弘一, Exotic 4-manifolds with
boundary, minimal genera and Stein
fillable 3-manifolds, 研究集会「4次元ト
ポロジー」, 広島大学, 2011年11月8日.

11. 安井弘一, Cork twisting exotic Stein
4-manifolds, 日本数学会 2011年度秋季総合
分科会 (一般講演), 信州大学, 2011年9月
28日.

12. 安井弘一, Cork twisting exotic Stein
4-manifolds, 阪大トポロジーセミナー, 大
阪大学, 2011年8月2日.

13. 安井弘一, 4次元多様体のコルクとその
応用, 広島大学談話会, 広島大学, 2011年6
月14日.

14. Kouichi Yasui, Cork twisting exotic
Stein 4-manifolds, Eighteenth Gokova
Geometry/Topology Conference, Gokova (ト
ルコ), 2011年6月2日.

15. 安井弘一, Cork twisting exotic Stein
4-manifolds, 広島大学トポロジー幾何セミ
ナー, 広島大学, 2011年4月26日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安井 弘一 (YASUI KOUICHI)
広島大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号: 70547009

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし