

令和 7 年 5 月 25 日現在

機関番号：32403

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2022～2024

課題番号：22H01129・23K22400

研究課題名（和文）境界をもつ領域における局在スポット解の運動を解析するための理論の構築

研究課題名（英文）Theory on the Analysis of Spot Solution Motion in Reaction-Diffusion Systems on Bounded Domains

研究代表者

栄 伸一郎 (EI, SHIN-ICHIRO)

城西大学・理学部・教授

研究者番号：30201362

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 14,990,000円

研究成果の概要（和文）：多変数反応拡散型数理モデルに現れるスポット解に対して、領域形状および境界条件が解挙動に与える影響を調べるための一般的な理論基盤を与えた。また、円盤領域、ほぼ直線に近い境界を持つ領域や障害物の存在する領域、あるいはキルヒホッフ境界条件を伴ったメトリックグラフ等の具体的な領域に対して、その一般論が示す抽象的な結果から具体的な運動方程式を厳密に導出することができた。例として、スポット解が反発的相互作用を有するとき、メトリックグラフ上では接合点に近づく運動や、より太いパスに向かう運動等が生じることを示すことができた。さらに障害物の形状に応じたスポット解の運動の解析に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

領域形状や境界条件がスポット解に与える影響は、これまで数値シミュレーションを中心に行われてきたが、理論的に解析するための手法を与えることは、これまで経験的に行われてきた相互作用解析に確固たる数学的基盤を与え、なにが正しい答であるのかを明白にすることができるという点で学術的に意義がある。また、応用範囲も広く、実際に近い神経網における神経パルスの伝搬や障害物周りの散乱現象を正確に捉えるための理論的手法を与えることができることから、数理科学のみならず、生命系や工学系の問題への適用も期待され、社会的な意義も十分に備えている。

研究成果の概要（英文）：For spot solutions appearing in multivariable reaction-diffusion mathematical models, we have established a general theoretical foundation to examine the influence of domain shape and boundary conditions on solution behavior. Additionally, for specific domains such as disk-shaped regions, regions with boundaries that are nearly straight, regions with obstacles, or metric graphs with Kirchhoff boundary conditions, we have rigorously derived concrete equations of motion from the abstract results indicated by the general theory. As an example, when spot solutions exhibit repulsive interactions, we have demonstrated that on metric graphs, motions such as approaching junction points or moving towards thicker paths can occur. Furthermore, we have successfully analyzed the motion of spot solutions based on the shape of obstacles.

研究分野：非線形解析

キーワード：反応拡散系 スポット解 進行波 相互作用

1. 研究開始当初の背景

反応拡散系における局在解の運動に関してこれまで行われてきた研究として、進行スポット解の構成や、2つのスポット解同士の相互作用といった結果があるが、それらはすべて全領域を対象とした研究であった。そのような状況の中で、矩形領域におけるスポット解の運動が幾人かの研究者によって始められたが、境界である矩形の辺との相互作用を考えるために、断熱境界条件を考慮して、辺を対称軸としたスポット解とその鏡像スポット解との相互作用を考察するという方法が取られた。これにより、散逸構造に現れるスポット解挙動の特徴が明らかになるなど成果があがっているが、矩形のコーナー付近ではどのような相互作用を考えるべきか、あるいは境界が直線でないときそもそも如何に扱うべきかといった、基本的な部分自体が不明で未整理であった。さらに、キルヒホッフ境界条件が課されたグラフ上の反応拡散系といった問題も多く研究者によって考察されるようになってきており、断熱境界条件以外の様々な境界条件も扱う必要が生じていた。また、領域内に障害物が存在する場合のスポット解の散乱現象も数値シミュレーションを中心に行われていたが、やはりその理論的基盤は脆弱であったといえる。

以上は、1次元、または2次元領域の問題に関する状況であるが、3次元以上の領域に対しては、ほぼ結果がないというのが現状であった。このような背景から、境界条件、およびその一般化として障害物等の存在がスポット解に与える効果を理論的に考察するための数学的な基盤づくりが必要とされた。

2. 研究の目的

反応拡散型モデルにおける局在スポットパターンは、様々な具体例で重要なキーとなる解として出現する。例えば樟脳片運動の数理モデルにおける樟脳片や交通流方程式における自己駆動粒子、あるいは神経伝搬方程式における神経パルスなど、それぞれの数理モデルにおいて最も重要と考えられる解の一つとして現れる。一方で、それら数理モデルの本来の目的はそうした解のダイナミックな動きや複数存在する場合の相互作用の解析などであり、そのための有効な方法の一つとしてスポット解の重心位置に関する運動方程式を用いた解析がある。これまでそうした運動方程式は全空間や半空間、あるいは円領域といった特別な領域内において導出されてきたが、一般の領域において境界などの影響を考慮に入れた運動方程式の導出方法が確立されていない。本研究課題では領域の境界やその拡張としての領域内部に存在する障害物、あるいはネットワーク上のノードなど、多様な領域と境界に対して、その影響を取り入れたスポット解の重心位置に関する運動方程式導出のための理論構築を行うことを目指した。また境界のある領域、障害物を含む領域、あるいは境界条件が課されたノードを含むメトリックグラフといった各種の領域において当理論を応用し運動方程式を具体的に抽出することにより、その適用方法を明らかにしつつ有効性を示すことを目的とした。その際、より多くのモデル方程式に適用可能とするために、一般多変数の方程式系を扱うことができるように理論を構築する必要があらることから、その達成も目指した。

3. 研究の方法

本研究では任意変数の多変数反応拡散系を対象として、スポット状の解の存在を仮定した上で、それらの重心位置の満たすべき運動方程式を境界の影響を含む形で具体的に、かつ数理的に導出するという方法をとる。より具体的には、第1ステップとして、2次元領域において各スポット解が境界および他のスポット解から十分離れている場合に申請者の開発した弱い相互作用の理論を用い、運動方程式に境界の影響を取り入れるための手法を構築する。この段階では、各スポット解の運動が十分遅いため準静的方法が適用できることから、与えられた領域と境界条件の下で修正ヘルムホルツ型の楕円型方程式を解く問題に帰着する。この楕円型方程式が解をもつことは一般論から示されるが、運動方程式導出のためにはその具体的な解の性質を調べることが重要となる。そのための理論的手法の開発、および数値計算のための数値スキームの開発を想定する。理論的側面からは領域が円領域あるいは円に近い楕円領域の場合には境界上の各点における鏡像を集めた集合を考えることにより、反射境界条件が課された楕円型方程式の問題に帰着できることを確認する。こうした手法により解の具体的な性質を抜き出すことが可能である。数値計算の側面からは、2次元領域である特質を利用して、代用電荷を配置する基本解近似解法の手法を応用/改良することを想定する。ヘルムホルツ型の楕円型方程式の数値解法に関しては、これまでディリクレ型の境界条件に関するものが主流であったが、本研究では第3種類の境界条件を扱う必要があり、その部分でも新たな手法の開発を行う。円領域やそれに準ずる領域で手法を開発し、本研究課題において一般の領域に適用できる形に拡張する。これにより少なくともシミュレーションレベルでは理論的に正しい運動方程式を用いた計算ができることになる。ネットワーク型メトリックグラフ上の問題に関して、各ノードでキルヒホッフ境

界条件が課された問題の場合は、上記の修正ヘルムホルツ型楕円型方程式に対応する解析が一般領域の問題に比べて容易であり、早期に運動方程式の導出を行う。したがって、ネットワーク型メトリックグラフ上の問題に対しては導出された運動方程式を用いて、様々なスポット解のより具体的な運動を検証することとなり、これまでに知られていない新たな運動形態の発見等につながる。上記初期段階の目標が達成したあとは、より複雑なスポット解の挙動、例えば分岐点近傍のスポット解を扱うことによる反射や分離現象を伴う挙動の解析へと進む。また、各スポット解が境界や他のスポット解とそれほど離れていない場合の解析も進める。この場合一般多変数系を扱うためにはかなりの困難を伴うと想定されるため、3変数系、4変数系へと徐々にモデル方程式の難度を上げていくこととする。また空間次元の一般化も視野に入れた解析を進める。

4. 研究成果

上記研究方法に関連して、滑らかな境界をもつ2次元領域内におけるスポット解の運動を記述する方程式の導出を一般論として行うことに成功し、その数学的妥当も示すことができた。これは近いうちに研究業績として論文にまとめる予定である。その導出された運動方程式は、領域上の、あるヘルムホルツ型非斉次楕円型方程式の解により決定されており、具体的な運動の様子を知るためにはその楕円型方程式の解の必要な情報を抜き出す必要がある。それに対して領域が円盤領域の場合、代用電荷法を適用することで近似解を用いて解を構成することに成功し、また近似解の収束性も厳密に示すことができた。これはディリクレ型以外の境界条件に対して得られた初めての結果として、数値解析的にも意義深いものとなった。円盤領域以外ではその方法を直接適用することはできないため、摂動的扱いなど複数のアイデアがあるが、当該研究期間中に解決に至ることはできなかった。

一方、境界が直線に非常に近い場合、摂動的な方法を適用することで非斉次楕円型方程式の解を精度よく近似することができ、境界の持つ幾何的情報が解挙動にどのような影響を与えるか調べることができた。1つの例として、スポット解が反発的相互作用を持つとき、境界の曲率の絶対値が低い方に向かう運動が生じることなどを示すことができた。

キルヒホッフ境界条件を有するメトリックグラフ上のスポット解の運動に関しては、対応する楕円型方程式を陽に解くことができ、解挙動の解析に必要な情報をすべて抽出することに成功した。その結果、反発的相互作用を持つスポット解が接合点に近づく運動をすることや、各メトリックグラフの太さのパラメータに対応して、より太いパスに向かって運動することなどを厳密に示すことができた。それらの結果は現在論文として執筆中である。

以上、境界の影響が解挙動に与える一連の研究に関しては、当該研究期間中に得られた成果は、かなり限定された領域に対してのみであるが、いずれも一般多変数の反応拡散系に適用可能な形で構築することができた。したがって、3変数系やより多変数のモデル方程式にも適用可能であり、実際、3種競合モデルに対する応用も行われた。また、神経伝搬方程式にも適用可能であることから、メトリックグラフ上の問題は実際の神経網に近い形で考察するための基盤ともなり得る。現在、それらの成果を応用して、神経伝搬方程式に現れる神経パルスが接合点を通過する際の進行速度の変化などを解析中である。これらは将来的に、神経パルスが末端神経から中枢に向かってどのように伝搬していくかを理論的に調べるための理論的基盤を与えると期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 栄 伸一郎	4. 巻 34
2. 論文標題 パターン形成とその縮約, フォーラム	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 応用数理	6. 最初と最後の頁 59 - 63
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 栄 伸一郎	4. 巻 734
2. 論文標題 動かぬ点の拡がりを追う, 特集・不動点の世界	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 5 - 6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 栄 伸一郎	4. 巻 64, 1,759
2. 論文標題 反応拡散方程式 (1) パターン形成と反応拡散型数理モデル,	5. 発行年 2025年
3. 雑誌名 数学セミナー	6. 最初と最後の頁 57 - 63
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 栄伸一郎	4. 巻 64, 2,760
2. 論文標題 反応拡散方程式 (2) 反応拡散系に現れるパターン	5. 発行年 2025年
3. 雑誌名 数学セミナー	6. 最初と最後の頁 62 - 67
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 宋伸一郎	4. 巻 64, 3_761
2. 論文標題 反応拡散方程式 (3) パターンの形成過程,	5. 発行年 2025年
3. 雑誌名 数学セミナー	6. 最初と最後の頁 79 - 85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shin-ichiro Ei, Ken Mitsuzono, Haruki Shimatani	4. 巻 28
2. 論文標題 The dynamics of pulse solutions for reaction-diffusion systems on a star-shaped metric graph with the Kirchhoff boundary condition	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 DCDS-B	6. 最初と最後の頁 6064, 6091
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcdsb.2022209	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shin-ichiro Ei, Hideo Ikeda, Toshiyuki Ogawa	4. 巻 448, 133703
2. 論文標題 Bifurcation of co-existing traveling wave solutions in a three-component competition-diffusion system	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Physica D	6. 最初と最後の頁 1, 14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.physd.2023.133703	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shin-ichiro Ei, Hideo Ikeda, Toshiyuki Ogawa	4. 巻 28
2. 論文標題 Alien invasion into the buffer zone between two competing species	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 DCDS-B	6. 最初と最後の頁 6034, 6063
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcdsb.2023081	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shin-ichiro Ei, Hiroyuki Ochiai and Yoshitaro Tanaka	4. 巻 402
2. 論文標題 Method of fundamental solutions for Neumann problems of the modified Helmholtz equation in disk domains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2021.113795	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Masataka Kuwamura, Hirofumi Izuhara, Shin-ichiro Ei	4. 巻 -
2. 論文標題 Oscillations and bifurcation structure of reaction-diffusion model for cell polarity formation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Biology	6. 最初と最後の頁 22-84
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00285-022-01723-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shin-ichiro Ei, Ken Mitsuzono and Haruki Shimatani	4. 巻 -
2. 論文標題 The dynamics of pulse solutions for reaction-diffusion systems on a star-shaped metric graph with the Kirchhoff boundary condition	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 DCDS-B	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcdsb.2022209	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 宋 伸一郎
2. 発表標題 Pulse dynamics on a metric graph
3. 学会等名 研究集会「広島微分方程式研究会」(招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 宋伸一郎
2. 発表標題 Pulse dynamics on a star-shaped metric graph with different widths
3. 学会等名 14th AIMS international conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 宋伸一郎
2. 発表標題 シャドウ系に現れるフロント解の運動について
3. 学会等名 北陸応用数理研究会2025 (招待講演)
4. 発表年 2025年

1. 発表者名 宋伸一郎
2. 発表標題 免疫効果を取り入れた SIR モデルとワクチン効果について
3. 学会等名 城西大学数理応用セミナー ミニワークショップ「感染症の数理」
4. 発表年 2025年

1. 発表者名 宋伸一郎
2. 発表標題 Effective nonlocal kernels on Reaction-diffusion networks
3. 学会等名 ICIAM 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宋 伸一郎
2. 発表標題 パターン形成問題とその縮約について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宋 伸一郎
2. 発表標題 Pulse dynamics on a metric graph
3. 学会等名 International Conference on Recent Developments of The Theory and Methods in Mathematical Biology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宋 伸一郎
2. 発表標題 Interaction of localized patterns in two dimensional spaces
3. 学会等名 RIMS Conference Multidisciplinary Research on Nonlinear Phenomena: Modeling, Analysis and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宋 伸一郎
2. 発表標題 A Billiard Problem in Nonlinear Dissipative Systems
3. 学会等名 ICIAM 2023, International Conference on Reaction-diffusion systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宋 伸一郎
2. 発表標題 Effective kernels for pattern formation problems
3. 学会等名 Turing Symposium on Morphogenesis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 宋 伸一郎
2. 発表標題 Pattern formation problems related to networks
3. 学会等名 NCTS Webinar on Nonlinear Evolutionary Dynamics (Taiwan) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>パターン形成を数理で解明する https://www2.sci.hokudai.ac.jp/faculty/researcher/shin-ichi-ro-ei</p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	黒田 紘敏 (kuroda hirotoshi) (80635657)	北海道大学・理学研究院・准教授 (10101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 第49回偏微分方程式論札幌シンポジウム	開催年 2024年～2024年
国際研究集会 第48回偏微分方程式論札幌シンポジウム	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 第47回偏微分方程式論札幌シンポジウム	開催年 2022年～2022年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------