

## 無限群と幾何学の新展開

## New developments in infinite groups and geometry

課題番号：24224002

坪井 俊 (TSUBOI TAKASHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授



### 研究の概要

興味深い無限群の理解が深まり、無限群をあつかう研究の手法が整えられてきたことを踏まえ、無限群と幾何学の研究を総合的に進める。関係する分野の研究者の共同研究により、無限群作用のトポロジ的、幾何的、力学系的な性質と様々な不変量の関係を明らかにし、新たな不変量を創出するとともに、それらをトポロジーおよび幾何学の諸問題へ応用する。

研究分野：幾何学

キーワード：位相幾何、無限群

### 1. 研究開始当初の背景

様々な幾何学における対称性を記述する群は通常、非可換無限群であるが、有限的な対称性を記述する有限群と比較して、非可換無限群の理解は難しいものであった。近年、リー群およびその離散部分群、様々な構造を保つ微分同相群、曲面の写像類群、有限表示群、実樹木の変換群などの理解が進んだ。また、群作用の特性類、無限群上の安定交換子長、解析的、確率論的力学系不変量を用いた無限群の研究の手法が整えられてきた。すなわち、無限群と幾何学の研究を総合的に進める基礎が固められてきた。

### 2. 研究の目的

幾何学およびトポロジーにおける無限群の幾何学的研究の発展を踏まえ、関係する分野の研究者の共同研究により、無限群作用のトポロジ的、幾何的、力学系的な性質と様々な不変量の関係を明らかにする。さらに無限群に対する新しい不変量を創出し、その意味を明らかにするとともに、それらをトポロジーおよび幾何学の諸問題へ応用する。

### 3. 研究の方法

各研究者が無限群の幾何的研究を推進しつつ、特に重点を置く(1) [空間形と無限群]、(2) [多様体の微分同相群]、(3) [曲面の写像類群]、(4) [無限群の力学系的不変量]、(5) [無限群と野生的空間]の5つの研究について、共同研究グループを組む。さらにグループ間の研究交流により、これらの研究を相互に関係させて新しい研究を生み出す。

### 4. これまでの成果

(1)～(5)にまたがる研究成果として、以下のものが得られた。

坪井は、(3)、(4)、(5)に関する研究として、微分同相群の一樣完全性、一樣単純性についての研究を継続し、球面の同相群の恒等写像成分、メンガーコンパクト空間の同相群に対して、任意の元は1個の交換子として書けることを示し出版した。これは同相写像の力学系的性質に着目して示したが、独創的な成果である。

小島は、(1)、(3)、(4)に関する研究として、曲面の自己同型写像の複雑さを計るエントロピーと写像トーラスの単体体積の間にある関係を研究し、擬アノソフ型自己同型写像に対し、Greg McShaneと共同で、面積により正規化したエントロピーと写像トーラスの体積の比は面積に依らない一定の定数で下から評価されることを示した。これは双曲3次元多様体についての著しい結果である。

研究分担者 大鹿は、(3)、(4)に関する研究として、タイヒミュラー空間の Bers 境界の商空間 (reduced Bers boundary) を導入し、そこには写像類群が自然に作用し、この空間の対称の群は、拡張された写像類群に完全に一致することを証明した。さらに、指標多様体の中のクライン群の変形空間の相対的位置、クライン群の極限集合の中の Patterson-Sullivan 測度の剛性、ヘーガード分解に伴う写像類群の部分群の双曲性などについて研究し、クライン群の変形空間の理論の深化に大きく貢献した。

研究分担者 小林は、(1)、(2)に関する研

究として、非対称空間およびその不連続群による商における大域解析の基礎理論構築を行った。まず、実旗多様体という幾何的概念を導入し、正則表現の重複度が有限になるための幾何的な必要十分条件を超局所解析を用いて与えた。また、無限次元表現の分岐則の離散性・重複度の有限性を保証するような対称対の分類理論を完成させた。さらに、不変微分作用素環が非可換な空間において、幾何的な測度評価の手法を導入し、正則表現が緩増加になるための検証可能な判定条件を得た。一方、固有不連続性の量的評価の概念を導入することによって、不定値計量をもつ空間形におけるスペクトル理論の研究を開始した。これらはそれぞれ新しい研究分野を創り出したものである。

研究分担者 藤原は、(3)、(4)、(5)に関する研究として、Bestvina, Bromberg と共同で、擬ツリーへの群作用の理論を確立した論文を出版した。それによって、写像類群、双曲群、自由群の外部自己同型群などについて、統一的な扱いが可能になった。同時に、写像類群の漸近次元の有限性を示した。これにより新しい理論の枠組みが出来てきた。

研究分担者 河澄は、(2)、(3)に関する研究として、境界成分数が複数の曲面の(高次)ジョンソン準同型を定式化し、また、正則ホモトピー版のゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数を導入することにより、ジョンソン準同型の像の制約条件である榎本佐藤トレースの幾何的解釈を与えた。同時に柏原ヴェルニュ問題の発散コサイクルの幾何的解釈もえられた。

研究分担者 足助は、(2)、(4)に関する研究として、葉層構造の二次特性類の連続変形による微分や変形についての特性類を統一的に Chern-Weil 理論を用いて計算する枠組みを与えた。特に Godbillon-Vey 類・Bott 類の微分については横断的な射影構造との関係を明らかにした。

## 5. 今後の計画

重点をおく 5 つの研究をさらに推進するとともに、研究相互の関連をいろいろな視点から検討していく。そのために研究者同士の交流の機会をさらに増やしていく。

## 6. これまでの発表論文等 (受賞等も含む)

- (1) Y. Benoist and T. Kobayashi, Temperedness of reductive homogeneous spaces, to appear in J. of the European Math. Soc.
- (2) N. Kawazumi and Y. Kuno, Intersections of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, to appear in Ann. Inst. Fourier.
- (3) Taro Aduke, Transverse projective structures of foliations and infinitesimal derivatives of the Godbillon-Vey

class, to appear in the Kobayashi Memorial Volume of Internat. J. Math.

- (4) W. Jeon, I. Kim, K. Ohshika and C. Lecuire, Primitive stable representations of free Kleinian groups, Israel J. Math. 199 (2014), no. 2, 841-866.
- (5) K. Ohshika, Reduced Bers boundaries of Teichmüller spaces, Ann. Inst. Fourier, 64 (2014), 145-176.
- (6) T. Kobayashi and T. Matsuki, Classification of finite-multiplicity symmetric pairs, Transformation Groups, vol. 19 (2014), pp. 457-493. DOI: 10.1007/s00031-014-9265-x.
- (7) Mladen Bestvina, Kenneth Bromberg, Koji Fujiwara. Constructing group actions on quasi-trees and applications to mapping class groups. Publ. IHES. published online 2014. DOI: 10.1007/s10240-014-0067-4
- (8) N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, Quantum Topology, 5 (2014), 347-423.
- (9) Takashi Tsuboi, Homeomorphism groups of commutator width one, Proc. AMS, 141, (2013), 1839-1847. DOI: 10.1090/S0002-9939-2012-11595-3
- (10) T. Kobayashi and Y. Oshima, Classification of symmetric pairs with discretely decomposable restrictions of  $(g, K)$ -modules, Crelles Journal. DOI: 10.1515/crelle-2013-0045 (on line 2013 July 13)
- (11) T. Kobayashi and T. Oshima, Finite multiplicity theorems for induction and restriction, Advances in Math., 248 (2013), 921-944. DOI: 10.1016/j.aim.2013.07.015
- (12) Sadayoshi Kojima, Entropy, Weil-Petersson translation distance and Gromov norm for surface automorphisms, Proc. AMS, 140 (2012), 3993-4002. DOI: 10.1090/S0002-9939-2012-11250-X

## 日本数学会総合講演

大鹿健一, Klein 群の幾何とその応用, 2014. 9. 26, 秋季総合分科会.

浅岡正幸, アノソフ力学系と群作用の剛性問題. 春季賞受賞講演, 2013. 3. 21.

## 受賞

小林俊行 平成 26 年春 紫綬褒章「数学研究功績」

藤原耕二 平成 25 年度文部科学大臣表彰科学技術賞 (理解増進部門)「滞在型プログラム JIR による数学研究の社会への理解増進」

浅岡正幸 2013 年度日本数学会春季賞「双曲力学系および関連する幾何学の研究」

ホームページ等

<http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/IGAG/>