

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 21 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(S)

研究期間：2012～2016

課題番号：24224003

研究課題名(和文)現代解析学と計算科学の手法による乱流の数学的理論の構築

研究課題名(英文) Mathematical Theory of turbulence by the method of modern analysis and computational science

研究代表者

小園 英雄 (KOZONO, HIDEO)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：00195728

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 114,400,000円

研究成果の概要(和文)：計算流体力学研究班の手法で簡単化された乱流モデルの構築，小さなスケールの流れの解析がかなりの精度で実現された．数学解析研究班の手法により，大きなスケールの乱流の普遍原理の確立がなされ「流れの数理」に成果をもたらした．「ナビエ・ストークス方程式大きなデータに対する時間大域的適切性」について，部分的ではあるが本質的な進歩が得られた．特に非線形偏微分方程式の手法を用いて大きなデータの解析が実行され，大きなレイノルズ数を扱うことができる程度可能となった．本研究により，乱流の解明に迫る現代解析学と計算科学の手法による「流体数学理論」が構築されつつある．

研究成果の概要(英文)：The challenging problem on global well-posedness of the Navier-Stokes equations had been so fully investigated that several remarkable results are obtained. Furthermore, our DNS of the uniformly isotropic turbulence is still by far the larger computational performance so that we could deal with the turbulent fluid with the high Reynolds number without any error of the experiment and indeterminacy. Our study has been based on the DNS of such a world highest standard and we could succeed to overcome difficulty of turbulence with the high Reynolds number. In this way, our research projects have developed the modern mathematical analysis, the applied mathematics, computational science and hydrodynamics and hopefully will lead the relevant subjects to the world-wide level.

研究分野：偏微分方程式論，非線形解析学

キーワード：ナビエ・ストークス方程式 調和解析学 関数解析学 大域的適切性 漸近解析 乱流の普遍性 情報
縮約手法 信頼性評価

1. 研究開始当初の背景

非線形発展方程式における主要な研究テーマとして、解の時間無限大における漸近挙動が上げられる。研究代表者はナビエ・ストークス方程式の解のエネルギー減衰について先駆的な研究を行ってきた。これは、元来、ナビエ・ストークス方程式の数学的研究の始祖である Leray によって提唱された有名な問題である。最近、数学解析における解の漸近指数は、数値シミュレーションによる計算結果と完全に一致することが明らかになった。

2. 研究の目的

大型計算機の飛躍的な性能向上に伴い、乱流の解明に計算科学的方法が広く使われつつある。しかし、乱流の問題の根幹にかかわる空間のスケール無限大、粘性消滅、エネルギー減衰といった極限操作に対しては、非線形偏微分方程式の解法における現代解析学の方法が威力を発揮する。実際、調和解析学による非線形偏微分方程式の解の漸近展開の方法は、大規模な有限計算の極限状態を予測可能とし、乱流理論や乱流縮約モデルの構築に寄与することが期待できる。本研究では、現代解析学の手法を用いて複雑な流動現象の解明、およびその予測信頼性向上に貢献すべく乱流の数学的理論を構築する。

3. 研究の方法

本研究は、数学解析研究班と流体力学研究班の2つの研究グループの連携によって推進する。数学解析研究グループでは、非線形偏微分方程式の手法、特に調和解析学を用いてナビエ・ストークス方程式および簡素化された方程式の解の性質を、数学的厳密理論および数値実験双方の観点から考察する。領域のサイズの影響やエネルギー減衰といった数値計算では扱えない無限大や極限操作を研究対象とし、大規模な流れを記述する適切なモデルの構築を行うと同時に、乱流の普遍原理に解明に数学的な確証を与える。流体力学グループでは、主として計算科学的方法、とくに大規模直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation=DNS) による乱流現象の解明、及び、数理物理的根拠を持ち恣意的調節パラメータを含まない情報縮約手法の開発に挑戦する。

4. 研究成果

(1) 流体力学の基礎方程式

- ① 回転する障害物の周りの定常 Navier-Stokes 方程式の解の存在と一意性
- ② 外部領域における定常 Navier-Stokes 方程式の弱解の一意性とエネルギー不等式
- ③ 多重連結領域における Leray の不等式と制限された流量条件の同値性
- ④ 一般化された流量条件下における定常 Navier-Stokes 方程式の大きな弱解の安定性

- ⑤ 回転座系における Navier-Stokes 方程式の周期解の存在とその漸近安定性
- ⑥ 無限層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の平行流型定常解の安定性および不安定性
- ⑦ 周期的層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の漸近挙動
- ⑧ 無限層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の平行流型時間周期解の線形化安定性解析
- ⑨ 圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時間周期解の存在と安定性
- ⑩ 座標軸の回転と障害物の回転によって生じる流れを記述する方程式系の解析

(2) 調和解析学的方法論の開発

- ① Banach 空間における一般化された Lax-Milgram の定理と楕円型境界値問題への応用
- ② ウェーブレット解析に基づく乱流モデルの開発
- ③ ソボレフ空間における非線形偏微分方程式の初期値問題の研究
- ④ 重み付き Moser-Trudinger 不等式の構成と指数関数型非線形項を持つ偏微分方程式への応用
- ⑤ ストリッカーズ評価の拡張、および、可微分性の低い非線形項を持つシュレディンガー方程式の初期値問題の研究
- ⑥ 無限領域における漸近解析と有限な計算領域の数値解析による領域の有限性の影響評価
- ⑦ 調和解析学の手法による高精度計算と新アルゴリズム開発

(3) 関連する非線形偏微分方程式

- ① 空間3次元における非線形波動方程式に対する外部問題の解の最大存在時刻の評価の精密化
- ② リトルウッド・ペリー分解 (波数空間における2進分解基底による関数の単位分解) による非線形分散型方程式の解法

(4) 乱流のもつ普遍的法則性

- ① 小さな渦の統計的普遍性-- $-4/5$ 則
- ② せん断乱流における統計的普遍性-- 線型応答理論
- ③ 世界最大規模の乱流 DNS による乱流普遍則の探索
- ④ 乱流微細渦構造の慣性領域への影響の評価
- ⑤ パッシブスカラー乱流の減衰
- ⑥ 規範的な乱流場の世界最大規模の直接数値計算と非線形偏微分方程式の解の特異点解析による小さなスケールの普遍性解明
- ⑦ 無限領域における乱流エネルギーの時間減衰指数に対する作用素の分数冪及び半群理論による解析

(5) 情報縮約手法, 予測可能性, 信頼性評価

- ① 複雑境界乱流の数値計算
- ② 乱流の予測可能性
- ③ LES (Large Eddy Simulation=小さな渦を適当にモデル化し、大きな渦を解く方法)による乱流モデルの開発

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 42 件)

1. Existence and uniqueness theorem on mild solutions to the Keller–Segel system coupled with the Navier–Stokes fluid, Kozono, H., Miura, M., Sugiyama, Y., *J. Funct. Anal.* **270**, 1663–1683, (2016).
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2015.10.016>
2. 小藺英雄, 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の定常・非定常流の調和解析的研究 「数学」 第67巻 113–132, (2015).
<http://mathsoc.jp/publication/sugaku/index67.pdf>.
3. Large time behavior of solutions to the compressible Navier–Stokes equations in an infinite layer under slip boundary condition, Aihaiti, A., Enomoto, S., Kagei, Y., *Math. Models Methods Appl. Sci.* **26**, 2617–2649, (2016).
4. The Oberbeck–Boussinesq approximation as a constitutive limit, Kagei, Y., Růžička, *Contin. Mech. Thermodyn.* **28**, 1411–1419, (2016).
5. Stability of time periodic solution of the Navier–Stokes equation on the half-space under oscillatory moving boundary condition, Kagei, Y., Oomachi, R., *J. Differential Equations* **261**, 3366–3413, (2016).
6. Spectral properties of the semigroup for the linearized compressible Navier–Stokes equations around a parallel flow in a cylindrical domain, Aoyama, R., Kagei, Y., *Adv. Differential Equations* **21**, 265–300, (2016).
7. Spectral properties of the linearized semigroup of the compressible Navier–Stokes equation on a periodic layer, Kagei, Y., Makio, N., *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **51**, 337–372, (2015).
8. Existence and stability of time periodic solution to the compressible Navier–Stokes equation for time periodic external force with symmetry, Kagei, Y., Tsuda, K., *J. Differential Equations*, **258**, 399–444, (2015).
9. Instability of plane Poiseuille flow in viscous compressible gas, Kagei, Y., Nishida, T., *J. Math. Fluid Mech.*, **17**, 129–143, (2015).
10. Existence and stability of time periodic solution to the compressible Navier–Stokes equation for time periodic external force with symmetry, Kagei, Y., Tsuda, K., *J. Differential Equations*, **258**, 399–444, (2015)
11. Instability of plane Poiseuille flow in viscous compressible gas, Kagei, Y., Nishida, T., *J. Math. Fluid Mech.*, **17**, 129–143, (2015).
12. Remark on the stability of the large stationary solutions to the Navier–Stokes equations under the general, Kanbayashi, N., Kozono, H., Okabe, T., *J. Math. Anal. Appl.* **409**, 378–392, (2014).
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.016>
13. Farwig, R., Kozono, H., Weak solutions of the Navier–Stokes equations with non-zero boundary values in an exterior domain satisfying the strong energy inequality, *J. Differential Equations* **256**, 2633–2658, (2014).
<https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.01.029>
14. On the pointwise decay estimate for the wave equation with compactly supported forcing term, Kubo, H., to appear in *Commun. Pure Appl. Anal.*
15. Almost global existence for nonlinear wave equations in an exterior domain in two space dimensions, Kubo, H., *J. Differential Equations*, **257**, 2765–2800, (2014).
16. On the sharp constant of the weighted Trudinger–Moser type inequality of the scaling invariant form, Ishiwata, M., Nakamura, M., Wadade, H., *Annales de l’institut Henri Poincaré–Analyse non linéaire*, **31**, 297–314 (2014).
17. Remarks on global solutions of dissipative wave equations with exponential nonlinear terms, Nakamura, M., Special issue in *Communications on Pure and Applied Analysis*
18. On the solutions for nonlinear wave equations with localized dissipations in exterior domains, Nakamura, M., *Nonlinear Dynamics in*

- Partial Differential Equations, *Advanced Studies in Pure Mathematics*. **64**, 289-295, (2014).
19. Remarks on a weighted energy estimate and its application to nonlinear wave equations in one space dimension, Nakamura, M., *Journal of Differential Equations*, **256**, 15 389—406, (2014).
 20. The Cauchy problem for semi-linear Klein-Gordon equations in de Sitter space-time, Nakamura, M., *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **410**, 1 February, 445-454, (2014).
 21. Small-scale intermittency in magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Reynolds numbers, Okamoto, N., Yoshimatsu, K., Schneider, K., Farge, M., *Phys. Rev. E*, **87**, 33013-1 -- 33013-10, (2014).
 22. Generalized Lax-Milgram theorem in Banach spaces and its application to the elliptic system of boundary value problems, Kozono, H., Yanagisawa, T., *Manuscripta Math.* **141**, 637-662, (2013). DOI: 10.1007/s00229-012-0586-6
 23. Weak solutions of the stationary Navier-Stokes equations for a viscous incompressible fluid past an obstacle., Heck, H., Kim, H., Kozono, H., *Math. Ann.* **356**, 653-681. (2013). DOI 10.1007/s00208-012-0861-6
 24. Hadamard variational formula for the Green's function of the boundary value problem on the Stokes equations, Kozono, H., Ushikoshi, E., *Arch. Ration. Mech. Anal.* **208**, 1005-1055, (2013). (DOI) 10.1007/s00205-013-0611-2
 25. Global compensated compactness theorem for general differential operators of first order, Kozono, H., Yanagisawa, T., *Arch. Ration. Mech. Anal.* **207**, 879-905, (2013). (DOI) 10.1007/s00205-012-0583-7
 26. Thin Shear Layers in High Reynolds Number Turbulence-DNS Results, Ishihara, T., Kaneda, Y., Hunt, JCR., *Flow Turbulence Combust* **91**(4), 895-929, **706**, (2013).
 27. Thin shear layer structures in high Reynolds number turbulence-Tomographic experiments and a local distortion model, Hunt, JCR., Ishihara, T., Worth, NA., Kaneda, Y., *Flow Turbulence Combust* **92**(3), 607-649, (2013).
 28. Generalized wave operators for a system of nonlinear wave equations in three space dimensions, Kubo, H., Kubota, K., *Hokkaido Mathematical Journal*, **42**, 1-31, (2013).
 29. Lower bound of the lifespan of solutions to semilinear wave equations in an exterior domain, Katayama, S., Kubo, H., *Hyper. J. Differential Equations*, **10**, 1-36, (2013).
 30. Almost global existence for exterior Neumann problems of semilinear wave equations in 2D, Katayama, S., Kubo, H., *Commun. Pure Appl. Anal.* **12**, 2331-2360, (2013).
 31. Global existence for exterior problems of semilinear wave equations with the null condition in 2D, Kubo, H., *Evolution Equations and Control Theory*, **2**, 319-335, (2013).
 32. Global existence and blow-up for wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension, Kubo, H., Osaka, A., Yazici, M., *Interdisciplinary Information Sciences*, **19**, 143-148, (2013).
 33. Global and almost global solutions for some nonlinear parabolic equations in Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces, Iwabuchi, T., Nakamura, M., *Adv. Differential Equations*, **18**, 7/8, 687-736, (2013).
 34. Remarks on global solutions for nonlinear wave equations under the standard null conditions, Lindblad, H., Nakamura, M., C. D. Sogge, J. *Differential Equations*, **254**, 3, 1396—1436, (2013).
 35. On the solutions for nonlinear wave equations with localized dissipations in exterior domains, Nakamura, M., *Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, Advanced Studies in Pure Mathematics*. **64**, (2013). (in press).
 36. Examination of the four-fifths law for longitudinal third-order moments in incompressible magnetohydrodynamic turbulence in a periodic box, Yoshimatsu, K., *Phys. Rev. E* **85**, 066313-1 -- 066313-7, (2013).
 37. Coherent vorticity and current density simulation of

- three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence using orthogonal wavelets, Yoshimatsu, K., Okamoto, N., Kawahara, Y., Schneider, K., Farge, M., Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., **107**, 73-92, (2013).
38. Spectral properties of the linearized compressible Navier-Stokes equation around time-periodic parallel flow, Brezina, J., Kagei, Y., J. Differential Equations, **255**, 1132-1195, (2013).
39. Leray's inequality in general multi-connected domains in \mathbf{R}^n , Farwig, R., Kozono, H., Yanagisawa, T., Math. Ann. **354**, 137-145, (2012)
DOI 10.1007/s00208-011-0716-6
40. On the stationary Navier-Stokes equations in exterior domains, Kim, H., Kozono, H., J. Math. Anal. Appl. **395**, 486-495, (2012).
doi:10.1016/j.jmaa.2012.05.039
41. Existence and uniqueness theorem on weak solutions to the parabolic-elliptic Keller-Segel system, Kozono, H., Sugiyama, Y., Yahagi, Y., J. Differential Equations **253**, 2295-2313, (2012).
doi:10.1016/j.jde.2011.08.02
42. On the stationary Navier-Stokes flows around a rotating body, Heck, H., Kim, H., Kozono, H., Manuscripta Math. **138**, 315-345, (2012).
DOI: 10.1007/s00229-011-0494-1
43. Existence and uniqueness theorem on mild solutions to the Keller-Segel system in the scaling invariant space, Kozono, H., Sugiyama, Y., Wachi, T., J. Differential Equations **252**, 1213-1228, (2012).
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2012.06.001>

(注：上記は全て査読あり)

[学会発表] (計 130 件)

招待講演(有力学会等)

1. Hideo KOZONO
・学会名・日時・場所: International Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations and Applications June 13 - 14, 2016, Shanghai, China
・講演題目: New a priori estimate of the 3D Navier-Stokes equations and its application to the Liouville type theorem.
2. Hideo KOZONO
・学会名・日時・場所: International

- Conference on Navier-Stokes Equations and Related PDEs June 23 - 25, 2016, CAMP, NIMS, Daejeon, Korea
- ・講演題目: Navier-Stokes equations with external forces in time-weighted Besov spaces.
3. Hideo KOZONO
・学会名・日時・場所: The 7th Pacific RIM Conference on Mathematics 2016 June 27 - July 1, 2016, Seoul National University, Korea
・講演題目: New a priori estimate of the 3D Navier-Stokes equations and its application to the Liouville-type theorem
 4. Hideo KOZONO
・学会名・日時・場所: Workshop on New trends in Partial Differential Equations October 3 - 7, 2016, Centro De Giorgi in Pisa, Italy
・講演題目: New a priori estimate of the 3D Navier-Stokes equations and its application to the Liouville type theorem

[図書] (計 2 件)

1. Recent developments of mathematical fluid mechanics, Amann, H., Giga, Y., Okamoto, H., Kozono, H., Yamazaki, M. Adv. Math. Fluid Mech., Birkhäuser/Springer, Basel, 2016.
DOI 10.1007/978-3-0348-0939-9_1
2. 乱流の計算科学—乱流解明のツールとしての大規模数値シミュレーション—
「計算科学講座」: 第5巻, 金田行雄, 石井克哉, 石原卓, 岩本薫, 吉田恭, 半場藤弘, 芳松克則, 共立出版, (2012).

国際会議の議長・国際学会会長等

1. Hideo Kozono, JSPS-DFG Japanese-German Graduate Externship The 13th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Nov. 30 - Dec. 02, 2016, Congress Center Darmstadtium, Darmstadt, Organizer.
2. Hideo Kozono, JSPS-DFG Japanese-German Graduate Externship The 14th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, March 8 - 10, 2017, Waseda University, Tokyo, Organizer.
3. Hideo KOZONO, The 7th Pacific RIM Conference on Mathematics 2016 June 27 - July 1, 2016, Seoul National University, Korea, Chairman

国際的有力雑誌のボードメンバー

1. Hideo Kozono, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, Editorial Board

2. Hideo Kozono, Journal of Mathematical Society of Japan, Editorial Board
3. Hideo Kozono, Funkcialaj Ekvacioj, Editorial Board

受賞

・小藪英雄

1. 2016年度文部科学大臣表彰科学技術賞
2. 2014年度日本数学会賞秋季賞
業績題目：非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の定常・非定常流の調和解析的研究

・隠居良行

1. 2012年度日本数学会解析学賞
業績題目：圧縮性粘性流体の平行流の安定性解析

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.waseda.ac.jp/math/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小藪 英雄 (KOZONO, Hideo)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：00195728

(2) 研究分担者

金田 行雄 (KANEDA, Yukio)
愛知工業大学・工学部・教授
研究者番号：10107691

久保 英夫 (KUBO, Hideo)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50283346

菱田 俊明 (HISHIDA, Toshiaki)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：60257243

中村 誠 (NAKAMURA, Makoto)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：70312634

芳松 克則 (YOSHIMATSU, Katsunori)
名古屋大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：70377802

隠居 良行 (KAGEI, Yoshiyuki)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：80243913

(3) 連携研究者

小澤 徹 (OZAWA, Tohru)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70204196