

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 23 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24244001

研究課題名(和文) 超平面配置に関わる数学の総括的研究

研究課題名(英文) Panoptic Study of Hyperplane arrangements

研究代表者

寺尾 宏明 (Terao, Hiroaki)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・名誉教授

研究者番号：90119058

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 27,400,000円

研究成果の概要(和文)：超平面配置の研究の拡がりとは本質を捕らえるために選んだ3つのテーマの研究成果を述べる。

(A) A型ワイル配置から派生したシー配置の微分加群の明示的基底を得た。そこにはベルヌーイ多項式が自然に登場する。またイデアル部分配置が自由であり、正ルートの高さ分布と指数とが互いに双対分割であることを示した。(B) 超幾何積分は超平面配置のモデュライ空間上の同期写像とみなすことができ、局所系コホモロジーの言葉で解釈される。この立場から、青木複体のコホモロジーを計算する新手法を定式化した。(C) 多重加法定理を証明することにより、いわゆる「寺尾予想」が成立するような自由超平面配置の族がかなり大きいことを示した。

研究成果の概要(英文)：The following three essential themes were selected to grasp the vastness of the research of hyperplane arrangements. The obtained results are as follows:

(A) An explicit formula for a basis of the derivation module of the Shi arrangements coming from the Weyl arrangement of type A was obtained. In the formula, the Bernoulli polynomials naturally appear. We proved that any ideal subarrangement is free and that the height distribution and the exponents are dual to each other. (B) Hypergeometric integrals are regarded as a period map on the moduli space of arrangements of hyperplanes and can be described in terms of local system cohomology. In this context, a new method was obtained to compute the cohomology groups of the Aomoto complex. (C) The multiple addition theorem was proved. Consequently we learned that the class of hyperplane arrangements in which the so-called Terao conjecture holds true is quite large.

研究分野：超平面配置

キーワード：代数的組合せ論 超平面配置

1. 研究開始当初の背景

研究対象は**超平面配置** (hyperplane arrangement) である。超平面配置とは、有限次元ベクトル空間 (あるいはアフィン空間) 内の超平面の有限集合のことを指す。各超平面、すなわち余次元 1 のベクトル部分空間 (あるいはアフィン部分空間) には個性がないので、超平面配置は超平面同士の交わり方のみによって区別される。交わり方の組合せ的情報を記述するのに用いられるのは、**交叉半順序集合** (intersection poset) や、**Orlik-Solomon Algebra** などである。一方、各超平面を保存する**微分** (derivation) (幾何的に言えば、配置に沿った**対数的ベクトル場**) 全体が自然になす加群が自由加群であるとき、その超平面配置を**自由配置**と呼ぶ。他方、位相幾何学的に考えれば、複素数体上、超平面の合併集合は余次元 1 の**特異点集合**をもつ超曲面であり、その補集合は非コンパクト非特異複素多様体である。従って、その多様体上の**ねじれコホモロジー**環やホモトピー群などの対象が考えられる。局所系コホモロジーと局所系ホモロジーのペアリングはねじれサイクル上の**超幾何積分**となる。超平面配置の例として最も重要なのは、既約ルート系から決まる結晶群 (crystallographic group)、あるいは、Weyl 群の中の鏡映 (reflection) の鏡映面全体の集合として得られる**結晶配置**あるいは、**Weyl 配置**は**組み紐配置** (braid arrangement) を含み特に重要である。また、もう少し一般化して得られる**実有限鏡映群** (Coxeter 群) の鏡映面全体の集合である **Coxeter 配置**の場合も含め、群作用の**軌道空間**は**フロベニウス多様体構造** (あるいは**平坦構造**) をもつ。このように、**組合せ論**、**代数幾何**、**位相幾何**、**特異点**、**群論**、**超幾何積分**、**微分幾何**、**数理物理**などの様々な数学が**超平面配置**という場において**交錯**している。

2. 研究の目的

超平面配置の研究は様々な分野への拡がりをもつが、本研究では、その内で最も根源的な以下の(A)(B)(C)の3つのトピックの研究を目的とする。

(A)Weyl 配置・Coxeter 配置の代数的・幾何的研究、(B)複素数の重み付き多重超平面配置に付随する局所系コホモロジーの研究、あるいは、超平面配置の補集合の超幾何積分の研究、(C)超平面配置の自由性についての研究である。

(A)が重要な理由は以下のとおりである。超平面配置研究の意義と面白さは、個別の超平面配置を詳しく調べ美しい等式や不等式を導き出すことにある。それらは超平面配置の結果にとどまらない。なぜなら個別の超平面配置は別の数学的対象の incarnation であることが多いからである。たとえば組み紐配置は対称群(置換群)の化身のひとつであり、

各部屋(chamber)が群要素と1対1に対応している。その意味では、Weyl 配置やCoxeter 配置の研究は常に重要な研究である。

(B)は青本-Gelfand の意味での超幾何積分の研究と直結しており、その重要性には疑問の余地がない。(C)また、超平面配置の理論が盛んになった1980年代初頭に、色々な予想が提出された。たとえば、齋藤予想、Orlik 予想などであるが、それらの多くは1990年頃までには決着を見た。現在まで生き延びている唯一の予想は、基礎体を固定するとき、超平面配置の自由性がその交叉半順序集合で決定される、という予想であり、しばしば寺尾予想と呼ばれる。肯定的解決にせよ、否定的解決にせよ、この予想が解決されれば、我々の超平面配置についての知識が新しいphaseに入ることは疑いなく、(C)における最大の目標となる。

3. 研究の方法

超平面配置自体は限定的対象ではあるが、その研究手法は多岐にわたる。本研究では懸案の予想や問題に決着をつけることを目的に、可能なすべてのアプローチを採用する。たとえば、目的(C)の主眼である、超平面配置の自由性が組合せ的性質であろうとの予想(いわゆる寺尾予想)についても、反例(否定的解決)を組織的に探索するグループを作る一方で、互いに異なる複数の手法で証明(肯定的解決)を試みる。すなわち予想の真偽の一方に賭けることをせず、専門性に応じた人的資源を双方に投入し、予想をいずれかの形で決着させることを最優先する。以下、目的(A)(B)(C)の各々についての研究方法を述べる。

目的(A)については、最重要の超平面配置であるWeyl 配置およびそれに付随する研究を行う。具体的には、Weyl 配置の部分配置、制限配置、(extended)Shi 配置と(extended)Catalan 配置などである。まずは(extended)Shi 配置の錘化の微分加群の基底を具体的に求めることに興味がある。なぜなら、A型(すなわち、Weyl 配置が組み紐配置の場合)に、ベルヌーイ多項式など整数論との関係が期待されるからである。この方向の研究には、連携研究者の松本耕二(ルート系に付随するゼータ関数とベルヌーイ多項式の権威)の協力を得る。また、これの配置の特性多項式の性質についても、まだまだ未知の部分が多いので、これまでの組合せ論的な種々の結果を応用することにより解明したい。

目的(B)については、具体的かつ重要な例である組み紐配置に関して局所系コホモロジーを共鳴(resonance)のある難しい場合に、状況を精査する。その際、組合せ的対象であるAomoto 複体のコホモロジーの具体的な計算から得られる局所系コホモロジーの情報を調べる。特に、実n-ネットの(否)存在について、分担研究者の吉永正彦の貢献が

期待できる。

目的(C)については、上述したように、「樂觀的アプローチ(OA)」と「悲觀的アプローチ(PA)」を平行して行う。(PA)については、計算機による反例探しを中心となる。(A)とも関連するが、Weyl 配置、Coxeter 配置、複素鏡映配置の部分配置、制限配置などの自由度を具体的にチェックすることにより反例が見つかる可能性がある。ここでは、G. Roehrl, T. Hoge, M. Cuntz らの海外共同研究者のもつ計算機科学の実践力に頼ることになる。一方、(OA)については、帰納的自由配置のような「予想が成立するクラス」をふくらすことにより徐々に予想の「成立確率」を上げてゆくという手法が考えられる。たとえば、加法定理の拡張や一般化が得られれば、(OA)を前に進めることに加え、自由配置の理解が高まることが期待される。

4. 研究成果

以下、「2. 研究の目的」の(A)(B)(C)の3トピックに分けて研究成果を述べる。(文中のなどは[雑誌論文]の番号を示す。)

- (A) Weyl 配置・Coxeter 配置の代数的・幾何的研究
- (1) Weyl 配置のイデアル部分配置がすべて自由配置であり、正ルートの高さ分布と exponents が互いに双対分割であることを示した。
 - (2) A 型 Shi 配置の微分加群の基底を明示的に与えることに成功した。そこには Bernoulli 多項式が自然に登場する。
 - (3) Shi 配置の微分加群の基底として特別な性質をもつ SRB(Simple Root Basis)の存在を証明した。
 - (4) 複素鏡映群の標準不変式を具体的に構成した。
 - (5) アフィン Weyl 配置は無限枚の超平面を持つが、その自由フィルトレーションであって、(拡張された) Shi 配置と(拡張された) Calatan 配置をすべて含むようなものの構成に成功した。
 - (6) 「ルート系とリーマン予想」と呼ばれたこともある Postnikov-Stanley 予想に対する新しいアプローチを試みた。Linial 配置の特性多項式の実部の分布に関する予想であり、特性準多項式と Euler 多項式を結びつけ、Worpitzky の恒等式を用いることにより、予想の解決に数歩近づいた。
- (B) 超幾何積分・局所系コホモロジー群に関する研究
- (1) Aomoto 複体のコホモロジーを計算する新手法を定式化した。その応用として実 4-nets の非存在を示した。
- (C) 自由配置に関する研究
- (1) 多重加法定理を証明し、その応用として(A)(1)を示した。
 - (2) (拡張)Shi 配置・(拡張)Catalan 配置

をすべて含むような自由フィルトレーションを構成した。

上記の(1)(2)により解決したい予想(いわゆる「寺尾予想」)が成立するような超平面配置のクラスがかなり大きいことがわかり、肯定的解決へのアプローチ(OA)をより前進させるべきであるという確信をもった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計13件)

Canonical systems of basic invariants for unitary reflection groups. (N. Nakashima, H. Terao, S. Tsujie) *Canad. Math. Bull.*, vol 59, no.3 (2016), 617-623, 査読有, doi: 10.4153/CMB-2016-031-7

Logarithmic vector fields for curve configurations in \mathbb{P}^2 with quasihomogeneous singularities. (H. Schenck, H. Terao, M. Yoshinaga) *Math. Res. Lett.* 掲載確定, 査読有

Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials. (M. Yoshinaga), *Tohoku Math. J.*, 掲載確定, 査読有

Free filtrations of affine Weyl arrangements and the ideal-Shi arrangements. (T. Abe, H. Terao) *J. Algebraic Combin.*, vol 43 (2016), 33-44, 査読有, doi:10.1007/s10801-015-0624-z

Resonant bands, Aomoto complex, and real 4-nets. (M. Torielli and M. Yoshinaga) *Journal of Singularities*, vol. 11 (2015), 33-51, 査読有, doi: 10.5427/jsing.2015.11b

Degeneration of Orlik-Solomon algebras and Milnor fibers of complex line arrangements. (P. Bailet, M. Yoshinaga) *Geometriae Dedicata*, vol. 175 (2015) 49-56, 査読有, doi: 10.1007/s10711-014-0027-7

数学 論説「超平面配置に関する最近の話題」. (H. Terao, M. Yoshinaga) 数学 第66巻第2号, 2014年春季号, 157-179, 査読有, <http://mathsoc.jp/publication/sugaku/index66.pdf> (目次のみ参照可)

Simple-root bases for Shi arrangements.

(T. Abe, H. Terao) Journal of Algebra, vol. 422 (2015), 89-104, 査読有, doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.09.011

The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. (T. Abe, M. Barakat, M. Cuntz, T. Hoge, H. Terao) J. Eur. Math. Soc., vol. 18 (2016), 1339-1348, 査読有, doi: 10.4171/JEMS/615

Weyl 配置のイデアル部分配置の自由性. (寺尾 宏明) 数理研講究録 1870, 2013, 115-126, 査読無, ISSN:1880-2818, URL:http://hdl.handle.net/2433/195440

Equivariant multiplicities of Coxeter arrangements and invariant bases. (T. Abe, H. Terao, A. Wakamiko) Advances in Math., vol. 230 (2012), 2364-2377, 査読有, doi: 10.1016/j.aim.2012.04.015

The Shi arrangements and the Bernoulli polynomials. (D. Suyama, H. Terao) Bull. London Math. Soc., vol. 44 (2012), 563-570, 査読有, doi: 10.1112/blms/bdr118

Arrangements stable under the Coxeter groups. (H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao) in: ``Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics and Topology, '' Proceedings of a special period at the De Giorgi Center, Scuola Normale in Pisa, May - June, 2010, (ed. A. Bjorner, F. Cohen, C. De Concini, C. Procesi, M. Salvetti), Edizioni Della Normale, Pisa, 327-354, 2012, 査読有, ISBN:978-88-7642-430-4, doi: 10.1007/978-88-7642-431-1_15

[学会発表](計 27 件)

- (1) Hiroaki Terao, Subarrangements and restrictions of Weyl arrangements. an invited talk at the Special Session on "Topology and Combinatorics of Arrangements (in honor of Mike Falk)" at an AMS Spring Eastern Sectional Meeting, 2016年3月19日, ストーンブルック (アメリカ合衆国)
- (2) Hiroaki Terao, Multiple addition theorem on arrangements of hyperplanes and a proof of the Shapiro-Steinberg-Kostant-Macdonald

dual-partition formula. an invited talk at "Braids, Configuration Spaces, and Quantum Topology", 2015年9月8日, 東京大学 (東京都・目黒区)

- (3) Hiroaki Terao, Before and After the Ideal-free Theorem. an invited talk at "Hyperplane arrangements and reflection groups", 2015年8月11日, ハノーファー (ドイツ)
- (4) Hiroaki Terao, On Parabolic Subarrangements and Restrictions of Weyl arrangements. an invited talk at "Differential and combinatorial aspects of singularities", 2015年8月7日, カイザーслаウテルン (ドイツ)
- (5) Hiroaki Terao, Ideal Free Theorem and Saturated Free Filtrations of Affine Weyl Arrangements. an invited talk at "Computational Geometric Topology in Arrangement Theory", 2015年7月10日, プロビデンス (アメリカ合衆国)
- (6) Hiroaki Terao, Ideal Free Theorem and Saturated Free Filtrations of Affine Weyl Arrangements. an invited talk at "Algebraic structures in combinatorics and geometry", 2015年6月11日, RIMS 京都大学 (京都府・京都市)
- (7) Hiroaki Terao, Arrangements of hyperplanes and applications. an invited special talk at Korea Advanced Institute of Science and Technology, 2015年3月13日, KAIST (韓国)
- (8) Hiroaki Terao, Ideal Free Theorem and Saturated Free Filtrations of Affine Weyl Arrangements. an invited talk at "The 10th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar", 2015年2月17日, 鹿児島大学 (鹿児島県・鹿児島市)
- (9) Hiroaki Terao, Free filtrations of affine arrangements of infinitely many hyperplanes. an invited talk at "Hokkaido University - University of Bremen Joint Seminar "Arrangements of Hyperplanes", 2014年12月1日, ブレーメン大学 (ドイツ)
- (10) Hiroaki Terao, Multiple addition theorem on arrangements of hyperplanes and a proof of the Shapiro-Steinberg-Kostant-Macdonald dual-partition formula. an invited

- talk at "The 1st Workshop of JSPS-MAE Sakura Program "Geometry and Combinatorics of Hyperplane Arrangements and Related Problems", 2014年9月3日, 北海道大学(北海道・札幌市)
- (11) Hiroaki Terao, Ideals of the roots posets and a new proof of the dual-partition formula by Shapiro-Steinberg-Kostant-Macdonald. an invited talk at "The 2nd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities", 2014年8月26日, 北海道大学(北海道・札幌市)
- (12) Hiroaki Terao, Chambers of Arrangements and Arrow's Impossibility Theorem. Workshop at "Recent developments on geometrical and algebraic methods in Economics", 2014年8月22日, 北海道大学(北海道・札幌市)
- (13) Hiroaki Terao, On ideal subarrangements of Weyl arrangements. an invited talk at "The 13th International Workshop in Real and Complex Singularities", 2014年7月28日, Instituto de Ciencias Matematicas e de Computacao Universidade de Sao Paulo (ブラジル)
- (14) Hiroaki Terao, On ideal subarrangements of Weyl arrangements. FPSAC '14 (The 26th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics), 2014年6月30日, DePaul University (アメリカ合衆国)
- (15) Hiroaki Terao, The freeness of ideal-Shi arrangements and free paths in affine Weyl arrangements (and a question). an invited talk at Workshop on "New perspectives in hyperplane and reflection arrangements", 2014年2月10日, Ruhr-Universitaet Bochum (ドイツ)
- (16) Hiroaki Terao, On ideal subarrangements of Weyl arrangements. an invited lecture at CIMPA-UNESCO-MESR-MINECO-VIETNAM research school on "Geometry and Topology of Singular Varieties. Theory and Applications", 2013年12月2日, 3日, 5日, 6日, the Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology (ベトナム)
- (17) Hiroaki Terao, On ideal subarrangements of Weyl arrangements. an invited talk at Conference on "Japanese Turkish Joint Geometry Meeting", 2013年11月22日, Galatasaray University (トルコ)
- (18) Hiroaki Terao, On ideal subarrangements of Weyl arrangements. an invited talk at Conference on "Hyperplane arrangements and characteristic classes", 2013年11月12日, RIMS 京都大学(京都府・京都市)
- (19) Hiroaki Terao, Multiple addition/deletion theorems and the existence of free paths in the affine Weyl arrangements. Combinatorics Seminar, 2013年7月11日, 名古屋大学(愛知県・名古屋市)
- (20) Hiroaki Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. an invited talk at Conference on "The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013", 2013年7月2日, 札幌コンベンションセンター(北海道・札幌市)
- (21) Hiroaki Terao, Logarithmic derivation modules of Shi arrangements associated with root systems. an invited talk at Conference on "Hyperplane Arrangements: Combinatorial and Geometric Aspects," 2013年2月21日, Ruhr-Universitat Bochum (ドイツ)
- (22) Hiroaki Terao, Logarithmic derivation modules of Shi arrangements associated with root systems. an invited talk at Workshop on "Free Divisors and Differential Equations", 2012年11月8日, 東京農工大学(東京都・小金井市)
- (23) Hiroaki Terao, Logarithmic derivation modules of Shi arrangements associated with root systems. an invited talk at "Combinatorial Representation Theory and Related Topics", 2012年10月11日, RIMS 京都大学(京都府・京都市)
- (24) Hiroaki Terao, Primitive derivations, Shi arrangements and Bernoulli polynomials. a colloquium talk at Northeastern Normal University, Chanchun, 2012年9月28日, Northeastern Normal University (中華人民共和国)

(25) Hiroaki Terao, Primitive derivations, Shi arrangements and Bernoulli polynomials. an invited talk at the "2012 Shanghai Conference on Algebraic Combinatorics", 2012年8月20日, Shanghai Jiao Tong University (中華人民共和国)

(26) Hiroaki Terao, Primitive derivations, Shi arrangements, Bernoulli polynomials and the height-free conjecture. an invited one-hour talk at the "FPSAC '12 (The 24th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics)", 2012年8月2日, 名古屋大学 (愛知県・名古屋市)

(27) Hiroaki Terao, Height basis of Weyl arrangements. an invited talk at the "Arrangements in Pyrenees" School on hyperplane arrangements and related topics, 2012年6月11日, Universite de Pau (フランス)

[図書] (計3件)

(1) 周期と実数の0-認識問題: Kontsevich-Zagierの予想(吉永正彦著) 数学書房, 2016年, 193ページ

(2) DMTCS Proceedings of "26th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2014)", DMTCS, 2016年, 956ページ(うち501-512ページ執筆、タイトル: The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements., T. Abe, M. Barakat, M. Cuntz, T. Hoge, H. Terao), <https://www.dmtcs.org/dmtcs-ojs/index.php/proceedings/issue/view/135.html>

(3) 不変量と対称性: 現代数学のこころ (pp.292) (今井 淳・寺尾宏明・中村博昭著) ちくま学芸文庫, 筑摩書房; ISBN: 4480095217, 2013年

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~terao/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

寺尾 宏明 (TERAO, Hiroaki)
北海道大学・大学院理学研究院・名誉教授
研究者番号: 90119058

(2) 研究分担者

(平成27年度まで)

吉永 正彦 (YOSHINAGA, Masahiko)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 90467647

(3) 連携研究者

阿部 拓郎 (ABE, Takuro)
九州大学・マス・フォア・インダストリ
研究所・准教授
研究者番号: 50435971

紙屋 英彦 (KAMIYA, Hidehiko)
大阪経済大学・経済学部・教授
研究者番号: 50300687

河野 俊丈 (KOHNO, Toshitake)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号: 80144111

竹村 彰通 (TAKEMURA, Akimichi)
滋賀大学・データサイエンス教育研究セン
ター・教授
研究者番号: 10171670

寺杣 友秀 (TERAOSOMA, Tomohide)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 50192654

松本 耕二 (MATSUMOTO, Kohji)
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 60192754

(4) 研究協力者

Michael Cuntz
ハノーファー大学 (ドイツ・ハノーファ
ー)・Institut für Algebra, Zahlentheorie
und Diskrete Mathematik・教授

Torsten Hoge
ルール大学ポーフム (ドイツ・ポーフム)・
数学部門・講師

中島 規博 (NAKASHIMA, Norihiro)
東京電機大学・情報環境学部・助教
研究者番号: 90732115

Gerhard Roehrl
ルール大学ポーフム (ドイツ・ポーフム)・
数学部門・教授

Hal Schenck
イリノイ大学 (米国イリノイ州)・
数学部門・教授