

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 8 月 3 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24244002

研究課題名(和文)ファイバー構造をもつ複素曲面の多角的研究

研究課題名(英文)Studies of fibred complex surfaces from diversified perspectives

研究代表者

今野 一宏 (Konno, Kazuhiro)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：10186869

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 17,200,000円

研究成果の概要(和文)：非特異射影代数曲線の上のファイバー空間構造をもつ非特異射影代数曲面の幾何学的な構造を相対的不変量の間関係式を通して研究した。とくに、種数3の非超楕円曲線束について、退化ファイバーに偏在する堀川指数や局所符号数といった局所不変量の明示的な表示を考察した。また、多重切断と相対ヤコビ多様体の演算を通して位相的に異なる平面曲線配置を研究し、新たなザリスキー組を得た。

研究成果の概要(英文)：Smooth projective algebraic surfaces with a fibration over a smooth projective curve are studied through the local analytic or topological invariants such as Horikawa index and local signature. We gave an explicit formula for them for non-hyperelliptic genus 3 fibrations. Also we studied plane curve arrangements through multiple sections of relative Jacobian varieties (of small genus) and produced new examples of Zariski pairs.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数曲線束 堀川指数 自己同型 楕円曲面 対数的混合ホッジ構造 原始的双有理変換

1. 研究開始当初の背景

相対極小代数曲線束の現代的な研究は、関数体上の代数曲線の研究という形で 1960 年代後半からの Parsin, Arakelov の研究に始まる。Arakelov (後に Beauville) は相対標準束が nef であることを示した。また、相対標準束の順像層の nef 性も、Griffiths らによる Hodge 構造の変動理論の展開と呼応する形で、上野や藤田の 1970 年代後半の研究で明らかにされた。他方、堀川は 2 重分岐被覆の標準特異点解消法を援用して Noether 直線に近い一般型代数曲面を詳細に研究した。その過程で、ファイバー種数が 2 のときに特異ファイバーに非自明な自然数値をとる関数を導入しスロープ等式を与え、1980 年代初頭にはそれを拡張し、一般種数の超楕円的代数曲線束に対するスロープ等式を得ている。また、Xiao は 1987 年にスロープ不等式を確立し「等号が成立するのは超楕円的な場合に限る」と予想した。研究代表者は Xiao 予想を肯定的に解決したが、同時に、非超楕円的代数曲線束にシャープな不等式を与えることが懸案の課題となった。同人は、奇数種数で最大 gonality の代数曲線束に対して、相対標準環の相対 Koszul cohomology を用いて堀川指数を代数的に定義し、スロープ等式を示すことに成功した。この場合、堀川指数は、モジュライ空間の所謂 k -gonal locus にサポートをもつ。

一方、位相幾何学に目を転じれば、写像類群を通してリーマン面の退化の研究が推進されていた。退化ファイバー芽があれば、写像類群へのモノドロミー表現が得られ、Nielsen の定理より、それは負型ツイスト擬周期写像の共役類に対応する。この逆対応を主張するのが、松本・Montesinos の定理である。また、松本は種数 2 の場合に曲面の符号数が特異ファイバーの周りに局在化するという、堀川指数と類似の現象を発見した。局所符号数は、その後、遠藤久顕により一般種数の超楕円曲線束に拡張定義された。また、研究分担者の足利正は、超楕円的堀川指数と遠藤の局所符号数との関係を Noether 等式を介して明らかにした。Donaldson らが実 4 次元多様体に対し symplectic 構造と Lefschetz 束の存在との同値性を示すに至り、位相幾何学における代数曲線束の果たす役割はより一層大きくなっている。

このように、代数曲線束をリーマン面の変形・退化と捉えた垂直方向の曲線に着目した研究が進展する一方、水平方向の曲線については、塩田徹治によって、Mordell-Weil 群という数論の対象に、曲線束の切断を用いて幾何学的な解釈が与えられた。この結果は、特異ファイバーの局所理論と曲面の大域構造との架け橋であると考えられる。

2. 研究の目的

本研究の研究対象は、代数曲線束をもつ非特異射影代数曲面である。その垂直方向・水平

方向の曲線の研究を、文字通りの縦糸・横糸として、射影代数曲面の幾何構造を多角的に研究する。垂直方向では、奇数種数で最大 gonality の退化ファイバー芽に対して異なる側面から定義された類似の局所不変量を比較する問題を中心に、松本・Montesinos 理論の代数幾何学的な解釈を通じて、退化ファイバー芽に付随する局所不変量の研究を飛躍的に発展させる。他方では、水平方向の曲線がなす Mordell-Weil 群(格子)の数論的性質を精査し、算術的データに反映されている幾何学的な情報を読み取る事によって、それを開代数曲面のトポロジーや分岐被覆の構成に応用する。

3. 研究の方法

退化ファイバー芽に付随する位相モノドロミーが周期的な場合に焦点を絞って局所不変量を具体的な計算を通して比較する。また、楕円曲面に限定してモデル・ヴェイユ群の切断による解釈を詳細に解析し、分岐被覆への応用を考える。さらに、位相モノドロミーや種数の制限を取り扱う方向に進む。また、数多くの計算を実行することにより、具体例の蓄積を図る。大阪大学、首都大学東京の各拠点では、関連する話題の勉強会やセミナーを定期的で開催し、問題点の共有をはかる。また、海外の研究協力者との連携を深めながら、研究集会を開催して、本基盤研究の研究成果を発表する。

4. 研究成果

当該研究期間において、研究代表者と研究分担者によって得られた主な研究成果は、次のようなものである。

超楕円曲線束の特異ファイバーの構成に自然に現れる正規 2 重点やトリゴナル曲線束に現れる巡回的 3 重点について、特異点の不変量に対するスロープ不等式を確立し、2 重点に対するダーフィー予想の別証明を与えた。種数 3 の非超楕円曲線束における特異ファイバーとして本質的なものを書き上げるためには、小山 2 重点の研究が不可避である。この種の特異点の例外集合の形状を、基本種数が 2 の場合に、組み合わせ論的に特徴付けた。非特異曲線をサポートにもつような重複ファイバーについて、重複度、ゴナリティー、標準系の基点の関係を考察し、超楕円的な場合とトリゴナルな場合に明示的な特徴付けを得た。種数 3 の非超楕円曲線束の堀川指数を半安定退化とモジュライ写像を通して研究し、アイヒラーのトレース公式の類似を用いた明示的な記述を得た。また、巡回商特異点および付随する連分数の高次元版を研究した。

楕円曲面の切断及び 2 重切断の幾何学を研究し、Galois 被覆の構成問題に適用した。その応用として多数の Zariski N 組を構成した。代数曲線の自己同型群が巡回群、対称群や二面体群などよりはもう少し一般的な群にな

る場合について，代数曲線の定義方程式の立場から研究を行った．正のエントロピーをもつ原始的正則自己同型を有する複素4次元かつ滑らかな，有理多様体，カラビ・ヤウ多様体，射影的超ケーラー多様体，アーベル多様体の存在を初めて示した．加藤・中山・臼井の共同研究により，混合ホッジ構造の分類空間の様々な部分コンパクト化相互の関係を記述した基本図式を完成させた．

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 38 件)

Kazuhiro Konno, A note on smooth multiple fibers in pencils of algebraic curves, *Nihonkai Math. J.* 査読有, 26 (2015), 103 -120.

Kazuhiro Konno, On the Yau cycle of a normal surface singularity, *Asian J. of Math.* 査読有, 16, no.2 (2012), 279 - 298.

Kazuhiro Konno and Daisuke Nagashima, Maximal ideal cycles over normal surface singularities of Brieskorn type, *Osaka J. Math.* 査読有, 49, no.1 (2012), 225 - 245

Tadashi Ashikaga, Toric modifications of cyclic orbifolds and an extended Zagier reciprocity for Dedekind sums. *Tohoku Math. J.* 査読有, 67 (2015), no. 3, 323-347

K. Tumenbayar and Hiro-o Tokunaga, Integral sections of elliptic surfaces and degenerated (2,3) torus decompositions of a 3-cuspidal quartic. *SUT J. Math.* 査読有, 51 (2015), no. 2, 215 - 226.

Shinzo Bannai and Hiro-o Tokunaga, Geometry of bisections of elliptic surfaces and Zariski N-plets for conic arrangements. *Geom. Dedicata*, 査読有, 178 (2015), 219 - 237.

Hiro-o Tokunaga, Sections of elliptic surfaces and Zariski pairs for conic-line arrangements via dihedral covers. *J. Math. Soc. Japan*, 査読有, 66 (2014), no. 2, 613 - 640.

Hiro-o Tokunaga, A note on quadratic residue curves on rational ruled surfaces. *Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry*, 565 - 577, *Adv. Stud. Pure Math.*, 63, *Math. Soc. Japan*, 査読有, Tokyo, 2012.

Mizuho Ishizaka and Hiro-o Tokunaga, On local trigonal fibrations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 査読有, 140 (2012), no. 11, 3677 - 3686.

Hiro-o Tokunaga, Some sections on

rational elliptic surfaces and certain special conic-quartic configurations. *Kodai Math. J.* 査読有, 35 (2012), no. 1, 78 - 104.

Kei Miura and Akira Ohbuchi, Automorphism group of plane curve computed by Galois points. *Beitr. Algebra Geom.* 査読有, 56 (2015), no. 2, 695 - 702.

Takeshi Harui, Jiryō Komeda and Akira Ohbuchi, The Weierstrass semigroups on double covers of genus two curves. *Tsukuba J. Math.* 査読有, 38 (2015), no. 2, 201 - 206.

Jiryō Komeda and Akira Ohbuchi, Weierstrass gap sequences at points of curves on some rational surfaces. *Tsukuba J. Math.* 査読有, 36 (2012), no. 2, 217 - 233.

J-M. Hwang and Keiji Oguiso, Local structure of principally polarized stable Lagrangian fibrations. *Minimal models and extremal rays (Kyoto, 2011)*, 247 - 275, *Adv. Stud. Pure Math.*, 70, *Math. Soc. Japan*, [Tokyo], 2016.

H. Esnault, Keiji Oguiso and X. Yu, Automorphisms of elliptic K3 surfaces and Salem numbers of maximal degree. *Algebr. Geom.* 査読有, 3 (2016), no. 4, 496 - 507.

Keiji Oguiso, Simple abelian varieties and primitive automorphisms of null entropy of surfaces. *K3 surfaces and their moduli*, 279 - 296, *Progr. Math.*, 査読有, 315, *Birkhauser/Springer*, 2016.

Keiji Oguiso, On automorphisms of the punctual Hilbert schemes of K3 surfaces. *Eur. J. Math.* 査読有, 2 (2016), no. 1, 246 - 261.

Sampei Usui, Studies of closed/open mirror symmetry for quintic threefolds through log mixed Hodge theory. *Recent advances in Hodge theory*, 134-164, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 427, *Cambridge Univ. Press*, 査読有, Cambridge, 2016.

Sampei Usui, Log Hodge theoretic formulation of mirror symmetry for Calabi-Yau threefolds. *Vietnam J. Math.* 査読有, 42 (2014), no. 3, 345 - 363.

Kazuya Kato, Chikara Nakayama and Sampei Usui, Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, III: Spaces of nilpotent orbits. *J. Algebraic Geom.* 査読有, 22 (2013), no. 4, 671 - 772.

[学会発表](計 62 件)

今野一宏, Canonical surfaces of

degree $3n-3$ in projective n -space, 第 13 回代数曲面ワークショップ (招待講演), 2016 年 7 月 2 日, 高知工科大学.
今野一宏, 一般型代数曲面の多重標準写像と標準環, 第 60 回代数学シンポジウム (招待講演), 2015 年 9 月 1 日, 静岡大学.
今野一宏, 平面 6 次曲線と標準曲面, 第 11 回代数・解析・幾何セミナー (招待講演), 2016 年 2 月 15 日, 鹿児島大学理学部.
今野一宏, 小山 2 重点について, 代数多様体とその周辺 (招待講演), 2014 年 9 月 30 日, 琉球大学理学部.
足利正, Horikawa index of genus 3 and hyperelliptic multiplicity, 代数曲線・曲面とその周辺 (招待講演), 2016 年 11 月 26 日, 大阪大学理学部.
Tadashi Ashikaga, Another realization of Birman-Hilden relation via hyperelliptic splitting family, Topology and Singularity (招待講演, 国際学会), 2015 年 10 月 14 日, 学習院大学.
足利正, A certain intersection number on moduli space of genus 3 and Horikawa index, 代数曲面ワークショップ, 2016 年 2 月 6 日, 首都大学東京秋葉原サテライトキャンパス.
徳永浩雄, On the topology of reducible plane curves, Tsuda College and OIST joint workshop on Calabi-Yau varieties (招待講演), 2016 年 8 月 1 日, 津田塾大学.
Hiro-o, Tokunaga, A remark on the topology of reducible curves, Seminario de Geometria y Topologia (招待講演), 2016 年 9 月 27 日, Universidad de Zaragoza (Spain).
Hiro-o Tokunaga, Integral sections of rational elliptic surfaces and contact conics to an irreducible 3-nordal quartic, Geometry, Topology and Combinatorics of Hyperplane Arrangements and Related Problems (招待講演, 国際学会), 2015 年 9 月 18 日, Universidad de Zaragoza (Spain).
大淵朗, Torres の定理の拡張について, ホッジ理論と代数幾何学 (招待講演), 2015 年 8 月 7 日, 東京電機大学.
大淵朗, Torres の強 DC 条件について, 代数幾何小研究集会 (招待講演), 2013 年 11 月 30 日, 新潟大学駅南キャンパスときめいと講義室 B.
大淵朗, 代数曲線とクリフォード指数について, 代数学シンポジウム (招待講演), 2012 年 8 月 20 日, 京都大学数理解析研究所.
Keiji Ogusio, Birational geometry through complex dynamics, The 7th

Pacific RIM Conference (招待講演, 国際学会), 2016 年 6 月 27 日, Seoul National University (Seoul, Korea).
Keiji Ogusio, Higher dimensional projective manifolds with primitive automorphisms of positive entropy, Cremona conference (招待講演, 国際学会), 2016 年 9 月 12 日, Basel, Swiss.
Keiji Ogusio, Higher dimensional manifolds with primitive birational automorphisms of first dynamical degree > 1 , the Legacy of Emmy Noether and Gottingen Mathematics (招待講演, 国際学会), 2016 年 12 月 19 日, Yau Math. Sci. Center (Sanya, China).
Keiji Ogusio, Primitive automorphisms of projective hyperkaehler 4-folds and Calabi-Yau 4-folds, RIMS Workshop on Complex Dynamics 2015 (招待講演, 国際学会), 2015 年 12 月 7 日, 京都大学数理解析研究所.
Sampei Usui, Extended period domains and algebraic groups (with K. Kato and C. Nakayama), Algebraic cycles and moduli (招待講演, 国際学会), 2016 年 6 月 4 日, Montreal, Canada.
臼井三平, On compactifications of higher Albanese varieties (joint with K. Kato and C. Nakayama), 射影多様体の幾何とその周辺, 2016 年 10 月 9 日, 高知工科大学.
Sampei Usui, Extended period domains and algebraic groups (with K. Kato and C. Nakayama), The 3rd Franco-Japanese-Vietnam Symposium of Singularities (招待講演, 国際学会), 2015 年 12 月 3 日, Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology (Hanoi, Vietnam).

[図書](計 4 件)

今野一宏, 内田老鶴圃, 代数曲線束の地誌学, 2013, 284
今野一宏, 内田老鶴圃, 代数方程式のはなし, 2014, 143
今野一宏, 共立出版, リーマン面と代数曲線, 2015, 272
今野一宏, 内田老鶴圃, 平面代数曲線のはなし, 2017, 170

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今野 一宏 (KONNO, Kazuhiro)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 10186869

(2) 研究分担者

徳永 浩雄 (TOKUNAGA, Hiro-o)
首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号： 30211395

足利 正 (ASHIKAGA, Tadashi)
東北学院大学・工学部・教授
研究者番号： 90125203

大淵 朗 (OHBUCHI, Akira)
徳島大学・大学院理工学研究部・教授
研究者番号： 1021111

小木曾 啓示 (OGUISO, Keiji)
東京大学・数理学研究科・教授
研究者番号： 40224133

臼井 三平 (USUI, Sampei)
大阪大学・その他部局等・名誉教授
研究者番号： 90117002