

平成 30 年 6 月 8 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24244012

研究課題名(和文) 偏微分方程式の解の形状と挙動に関する系統的研究

研究課題名(英文) Systematic studies on the profile and behavior of solutions of partial differential equations

研究代表者

柳田 英二 (Yanagida, Fiji)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：80174548

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 34,400,000円

研究成果の概要(和文)：楕円型および放物型偏微分方程式について解の形状と挙動に関する系統的研究を行い、主に以下のような成果をあげた。

楕円型方程式については、スケーリング法を適用することによって帰着される方程式に対するLiouville型定理を導出した。また球面上の方程式の特異解の存在・非存在と正值解の構造、非線形項の指数が空間変数に依存する方程式について成果を得た。

放物型方程式については、逆二次のポテンシャル項をもつ線形熱方程式に関する解の構造の解明を行った。また、藤田型方程式に対する時間大域解の有界性の導出と特異解の存在および定常解の安定性解析、フィッシャー型方程式の界面の挙動について成果をあげた。

研究成果の概要(英文)：We carried out systematic studies on the profile and behavior of solutions of elliptic and parabolic partial differential equations, and obtained the following results among others.

For elliptic equations, we showed a Liouville-type theorem for an equation transformed by a scaling method. We also obtained results on the existence and no-existence of singular solutions and the structure of positive solutions for equations on the sphere, and equations with space-dependent exponent of nonlinearities.

For parabolic equations, we made clear the structure of solutions of a linear heat equation with inverse-square potential. We also studied the Fujita equation about the boundedness of time-global solutions, existence of singular solutions and their stability, and Fisher's equation about the dynamics of interfaces.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：形状解析 漸近挙動 安定性 特異性 進行波解 解の爆発

1. 研究開始当初の背景

自然科学や工学に見られる様々な現象は偏微分方程式系を用いてモデル化されることが多いが、その解の形状や挙動などの定性的な性質を調べることは現象の数理的理解には重要であり、これまで多くの研究がなされてきた。

単独の優線形拡散方程式については、藤田宏氏による爆発の臨界指数についてのパイオニア的研究以来、国内外の多くの研究者が理論の発展に貢献してきた。時空間パターンの形成や波動の伝播などの現象は反応拡散系のような連立偏微分方程式系を用いて記述されることが多いが、反応拡散系の理論の発展には日本のグループの貢献も大きい。また非線形楕円型方程式については古典的な関数解析的研究に加え、放物型方程式の定常状態を記述する方程式として新しい傾向の研究が進められた結果、新たな非線形構造の発見へとつながっている。

このような流れの中で、偏微分方程式系の解の形状と挙動に関する研究は理論面からも応用面からもますますその重要性が高まり、アメリカ、ヨーロッパ諸国、日本を中心に活発に研究が進められ、偏微分方程式論におけるもっとも重要かつ発展性のある問題となっていた。

2. 研究の目的

これまでの研究成果の蓄積により、タイプの異なる方程式に類似した数理構造が見られることが明らかになってきており、より高い視点からの研究の必要性が高まっている。この結果、より大局的な見地からの取り扱いの必要性が高まっているが、用いられる数学的手法は方程式によって異なるのが普通であり、個人による研究によっては統一的な視点からの定性理論の構築はきわめて難しい課題となっている。

本計画の目的は、解析学のコアとなる部分を共有する背景の異なる研究者が組織的かつ系統的に研究を進めることにより、偏微分方程式系の解の空間的形狀と時間的挙動に関する定性理論の構築と新しい展開を計ることである。

3. 研究の方法

数学的には、従来の偏微分方程式論的あるいは関数解析的手法に加え、特異摂動法、漸近解析的手法、無限次元力学系の理論、変分的手法、分岐理論を進展させることによって問題の解決にあたるとともに、これまでの不備な点を補う新たな解析手法の構築を目指した。また現象の直感的理解を助けるために、数値シミュレーションを補助的手段として用い、場合によっては数値的結果にもとづく semi-rigorous なアプローチを行った。

本計画を推進するにあたっては、代表者および分担者はそれぞれの研究分野の発展を図ると同時に横の連携を強化する必要があ

った。そのために、国内では、参加者による共同研究を進めるほか、他の研究グループとも連携し、定期的にセミナーや研究集会を開催して情報や意見の交換を行った。

国際的には、二国間あるいは二地域間のワークショップを定期的に開催し、海外の研究者との交流を推進した。また海外の研究協力者の招へいあるいは訪問を通じて最新の情報や意見の交換を行い、共同研究を推進した。

4. 研究成果

単安定放物型方程式については、球対称な定常特異解の重み付き空間における大域的安定性、特異定常解についての収束レート、ホモクリニック解の到達可能性、前方自己相似変換後の方程式に付随するエネルギー汎関数に関する大域的コンパクト性、時間大域存在と有限時刻爆発を分ける敷居解の構造などについて進歩があった。

双安定放物型方程式については、軸非対称進行波解の存在とスピードがゼロの局在進行波解の非存在、角錐型進行波の存在、界面が不規則な挙動を示す現象の解明を行った。

走化性方程式については、増殖・死滅を考慮に入れた一般化された走化性方程式の解の有界性の精密な評価とアトラクターの存在、解が時間帯域的に存在するようなその感応性関数のクラスを明らかにした。

非線形楕円型方程式については、生物モデルに現れる非線形最適化問題、球面上での楕円型偏微分方程式の解の形状について成果が得られた。

曲面の発展方程式である表面拡散方程式については、定常曲面である円柱とアンデューロイドの安定性判定条件の導出、大域的な分岐図を導出などの研究を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

【雑誌論文】(計 60 件)

以下はすべて査読有

1. Y. Naito, T. Suzuki, Y. Toyota, A priori bounds for superlinear elliptic equations with semidefinite nonlinearity, *Nonlinear Anal.* 151 (2017) 18-40, <http://doi.org/10.1016/j.na.2016.11.016>
2. K. Fujie, T. Senba, Global existence and boundedness of radial solutions to a two dimensional fully parabolic chemotaxis system with general sensitivity, *Nonlinearity* 29 (2017), 2417-2450, DOI:10.1088/0951-7715/29/8/2417

3. K. Ishige, Y. Kabeya, El M. Ouhabaz, The heat kernel of a Schrödinger operator with inverse square potential, *Proc. Lond. Math. Soc.* 15 (2017) 381-410, DOI:10.1112/plms.12041
4. M. Ishiwata, H. Wadade, On the effect of equivalent constraints on a maximizing problem associated with the Sobolev type embeddings in \mathbb{R}^N , *Math. Ann.* 364 (2016) 1043-1068, DOI:10.1007/s00208-015-1243-7
5. M. Hoshino, E. Yanagida, Convergence rate to singular steady states in a semilinear parabolic equation, *Nonlinear Anal.* 131 (2016), 98-111, DOI: 10.1016/J.na.2015.06.020
6. N. Ioku, M. Ishiwata, T. Ozawa, Sharp remainder of a critical Hardy inequality, *Arch. Math. (Basel)* 106 (2016) 65-71, DOI:10.1007/s00013-015-0841-7
7. Y. Kohsaka, Stability Analysis of Delaunay Surfaces as Steady States for the Surface Diffusion Equation, *Springer Proc. Math. Stat.* 176 (2016) 121-148, DOI:10.1007/978-3-319-41538-3_8
8. S.-I. Ei, K. Ikeda, E. Yanagida, Instability of multi-spot patterns in shadow systems of reaction-diffusion equations, *Commun. Pure Appl. Anal.* 14 (2015) 717-736, DOI:10.3934/cpaa.2015.14.717
9. N. Ioku, K. Ishige, E. Yanagida, Sharp decay estimates in Lorentz spaces for nonnegative Schrodinger heat semigroups, *J. Math. Pures Appl.* (9) 103 (2015) 900-923, <https://arxiv.org/abs/1310.8074>
10. K. Fujie, T. Senba, Global existence and boundedness in a parabolic-elliptic Keller-Segel system with general sensitivity, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 21 (2016) 81-102, DOI:10.3934/dcdsb.2016.21.81
11. Y. Naito, Global attractivity and convergence rate in the weighted norm for a supercritical semilinear heat equation, *Differential Integral Equations* 28 (2015) 777-800, <https://projecteuclid.org/euclid.die/1431347863#abstract>
12. N. Ioku, M. Ishiwata, A scale invariant form of a critical Hardy inequality, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 18 (2015) 8830-8846, DOI:10.1093/imrn/rnu212
13. Y. Naito, A remark on self-similar solutions for a semilinear heat equation with critical Sobolev exponent, *Adv. Stud. Pure Math.* 64 (2015) 461-468, <http://mathsoc.jp/publication/ASPM/contents/CFM64.pdf>
14. P. Polacik, E. Yanagida, Global unbounded solutions of the Fujita equation in the intermediate range, *Math. Ann.* 360 (2014) 255-266, DOI: 10.1007/s00208-014-1038-2
15. M. Efendiev, T. Senba, A. Zhigun, On a weak attractor of a class of PDEs with degenerate diffusion and chemotaxis, *J. Math. Soc. Japan* 66 (2014) 1133-1153, DOI:10.2969/jmsj/06641133
16. Y.-L. Wu, C.-Y. Chen, J.-L. Chern, Y. Kabeya, Existence and uniqueness of singular solutions for elliptic equation on the hyperbolic space, *Commun. Pure Appl. Anal.* 13 (2014) 949-960, <http://dx.doi.org/10.3934/cpaa.2014.13.949>
17. J.-S. Guo, H. Ninomiya, M. Shimojo, E. Yanagida, Convergence and blow-up of solutions for a complex-valued heat equation with a quadratic nonlinearity, *Trans. Amer. Math. Soc.* 365 (2013) 2447-2467, <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2012-05797-7>
18. Y. Naito, T. Senba, Bounded and unbounded oscillating solutions to a parabolic-elliptic system in two dimensional space, *Commun. Pure Appl. Anal.* 12 (2013) 1861-1880, DOI:10.3934/cpaa.2013.12.1861
19. K. Ishige, Y. Kabeya, Decay rate of L^q norms of critical schrodinger heat semigroups, "Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's", in *Springer INdAM Ser. 2*, (2013) 165-178, DOI:10.1007/978-88-470-2841-8_11
20. W.-M. Ni, M. Taniguchi, Traveling

fronts of pyramidal shapes in competition-diffusion systems, *Netw. Heterog. Media* 8 (2013) 379-395, DOI:10.3934/nhm.2013.8.379

21. S. Sato, E. Yanagida, Appearance of anomalous singularities in a semilinear parabolic equation, *Commun. Pure Appl. Anal.* 11 (2012) 387-405, DOI:10.3934/cpaa.2012.11.387
22. Y. Naito, T. Senba, Blow-up behavior of solutions to a parabolic-elliptic system on higher dimensional domains, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A* 32 (2012) 3691-3713, DOI:10.3934/dcds.2012.32.3691
23. K. Ishige, M. Ishiwata, Global solutions for a semilinear heat equation in the exterior domain of a compact set, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A* 32 (2012) 847-866, DOI:10.3934/dcds.2012.32.847
24. Y. Naito, The role of forward self-similar solutions in the Cauchy problem for semilinear heat equations, *J. Differential Equations* 253 (2012) 3029-3060, <https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.08.013>

[学会発表] (計 121 件)

以下はすべて招待講演

1. E. Yanagida, Long-time behavior of solutions of the Fisher-KPP equation for slowly decaying initial data, *Mathematical Analysis on Nonlinear PDEs*, 2017
2. Y. Naito, Separation structure of solutions for elliptic equations with exponential nonlinearity, 2017 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2017
3. Y. Kabeya, Positive Schrodinger operators with the inverse square potential and related topics, *Mathematical Analysis on Nonlinear PDEs*, 2017
4. E. Yanagida, Removable and non-removable singularities in some parabolic equations, *The 7th Pacific RIM Conference on Mathematics 2016*, 2016

5. M. Ishiwata, On the compactness of the embedding $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(x)(\Omega)$, *International Workshop on Nonlinear PDEs 2016* in Osaka, 2016
6. E. Yanagida, Boundary singularity in a semilinear parabolic equation with the Neumann boundary conditions, *7th Euro-Japanese Workshop on Blow-up*, 2016
7. Y. Naito, Peaking solutions to semilinear heat equations with supercritical nonlinearities, *7th Euro-Japanese Workshop on Blow-up*, 2016
8. T. Senba, Global existence and boundedness of solutions to chemotaxis systems with general sensitivity, *7th Euro-Japanese Workshop on Blow-up*, 2016
9. M. Ishiwata, A remark on the compactness of the Sobolev type embedding with variable exponent, *Pacific Rim Conference*, 2016
10. 内藤雄基, Structure of positive solutions for semilinear elliptic equations with supercritical growth, *RIMS 研究集会「偏微分方程式の解の形状と諸性質」*, 2015
11. Y. Kabeya, Singular solutions to a nonlinear elliptic equation on the whole unit sphere, *RIMS Workshop on Qualitative theory of ordinary differential equations in real domains*, 2015
12. 仙葉隆, 非線形知覚関数を持つ走化性方程式系の解の挙動について, *RIMS 研究集会「非線形現象の解析への応用としての発展方程式論の展開」*, 2015
13. Y. Naito, Separation structure of positive radial solutions for semilinear elliptic equations, *Equadiff 2015*, 2015
14. Y. Kabeya, Existence of an asymmetric solution to a nonlinear elliptic equation on the whole sphere, 2015 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2015
15. 高坂良史, On the criteria for the

- stability of unduloids, RIMS 研究集会「保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性・特異性の研究」, 2015
16. Y. Kabeya, Solutions to the equation of the scalar-field type on a large spherical cap, RIMS 研究集会「偏微分方程式の解の形状と諸性質」, 2014
 17. Y. Naito, Threshold solutions for semilinear heat equations with polynomial decay initial data, 6th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 2014
 18. T. Senba, Some properties of radial stationary solutions to a parabolic-elliptic system related to Keller-Segel system, 10th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014
 19. T. Senba, Some properties of radial stationary solutions to a parabolic-elliptic system and its application, Conference on Nonlinear Phenomena in Biology, Physics and Mechanics, 2014
 20. T. Senba, On the behavior of solutions to a system of partial differential equations related to biology, The 22nd International Conference of FIM on Interdisciplinary Mathematics, Statistics and Computational Techniques, 2013
 21. Y. Kabeya, Bifurcation diagrams of nonlinear elliptic problems on a spherical cap, Swiss-Japanese Seminar at University of Zurich, 2012
 22. M. Taniguchi, Multi-dimensional traveling fronts in bistable reaction-diffusion equations in \mathbb{R}^N , AMS Southeastern Fall Section Meeting, 2012
 23. T. Senba, Oscillating solutions to a simplified chemotaxis system in high dimensional spaces, 5th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 2012
 24. Y. Naito, Global attractivity properties of stationary solutions for semilinear heat equations, 5th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 2012
 25. E. Yanagida, Asymptotic Behavior of Singular Solutions for a Semilinear Parabolic Equation, 9th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012
 26. M. Ishiwata, On the asymptotic behavior of solutions for semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent, 9th AIMS conference on Dynamical systems, Differential equations and Applications, 2012
- 〔図書〕 (計 1 件)
1. 柳田英二, 東京大学出版会, 反応拡散方程式, 2015 年, 320 ページ
- 〔その他〕 ホームページ等
<http://www.math.titech.ac.jp/~yanagida/research.html>
- ## 6. 研究組織
- (1) 研究代表者
 柳田 英二 (YANAGIDA, Eiji)
 東京工業大学・理学院・教授
 研究者番号 : 80174548
 - (2) 研究分担者
 仙葉 隆 (SENBA, Takasi)
 福岡大学・理学部・教授
 研究者番号 : 30196985

 内藤 雄基 (NAITO, Yuki)
 愛媛大学・理工学研究科・教授
 研究者番号 : 10231458

 壁谷 喜継 (KABEYA, Yoshitsugu)
 大阪府立大学・工学(系)研究科(研究院)・教授
 研究者番号 : 70252757

 石渡 通徳 (ISHIWATA, Michinori)
 大阪大学・基礎工学研究科・教授
 研究者番号 : 30350458

 高坂 良史 (KOHSAKA, Yoshihito)
 神戸大学・海事科学研究科・准教授
 研究者番号 : 00360967

 谷口 雅治 (TANIGUCHI, Masaharu)
 岡山大学・異分野基礎科学研究所・教授
 研究者番号 : 30260623
 (平成 24 年度のみ)
 - (3) 連携研究者 なし

(4) 研究協力者

Peter Polacik, Professor
School of Mathematics
University of Minnesota, USA

Marek Fila, Professor
Department of Applied Mathematics and
Statistics
Comenius University, Slovakia

Jun-Ping Shi, Professor
Mathematics
College of William and Mary, USA

Khin Phyu Phyu Htoo, Lecturer
Department of Mathematics
Mandalay University, Myanmar

Kin-Ming Hui
Research Fellow (Professor)
Institute of Mathematics
Academia Sinica, Taiwan

Jann-Long Chern, Professor
Department of Mathematics
National Central University, Korea

Chiun-Chuan Chen, Professor
Department of Mathematics
National Taiwan University, Taiwan

Marta Garcia-Huidobro, Professor
Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de
Chile, Chile

Yuan Lou, Professor
Department of Mathematics
Ohio States University, USA

以上