

平成 30 年 6 月 1 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2017

課題番号：24300107

研究課題名(和文) 確率微分方程式モデルの統計推測法の開発と高頻度データ解析への応用

研究課題名(英文) Statistical inference for stochastic differential equations and its applications to high frequency data analysis

研究代表者

内田 雅之 (UCHIDA, Masayuki)

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：70280526

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,700,000円

研究成果の概要(和文)：拡散型確率過程のサンプリング問題を研究した。高頻度データを用いて確率微分方程式のパラメトリック推測を行う際に、疑似最尤推定量の導出が重要であるが、その推定量を効率よく算出するために、ベイズ型推測と最尤型推測の利点を活用したハイブリッド型推測法を開発し、その数学的正当化を行った。大規模数値実験によって提案手法の有効性の実証を試み、エルゴード的拡散過程や微小拡散過程に対して、ハイブリッド型推定量の漸近挙動が安定していることを確認した。提案手法は上記のモデルだけでなく、一般のモデルに対して適応可能である。また、レヴィ駆動型確率微分方程式の統計推測および高頻度データ解析への応用について研究した。

研究成果の概要(英文)：We considered sampling problems for diffusion type processes. For parametric inference of stochastic differential equations based on high frequency data, it is important to obtain a quasi-maximum likelihood estimator (QMLE). In order to compute the QMLE efficiently, we proposed the hybrid type estimator by using advantages of both Bayes type estimation and the maximum likelihood type estimation. Moreover, the mathematical validity of the proposed estimator was shown and we confirmed that the proposed estimator had good performance by large scale numerical simulations. The proposed statistical method works well for not only diffusion type models including ergodic diffusions and small diffusions but general models. We also researched statistical inference for Levy driven stochastic differential equations and applications of statistical inference for stochastic differential equations to high frequency data analysis.

研究分野：統計科学

キーワード：数理統計学 拡散過程 Levy過程駆動型SDE 疑似尤度解析 高頻度不規則観測 セミマルチンゲール 非整数ブラウン運動 ボラティリティ

### 1. 研究開始当初の背景

連続時間確率過程の重要なクラスである確率微分方程式は確率解析にとどまらず、数理ファイナンス・金融工学や数理生物学においても広く普及している標準的な数学モデルである。さらに、計算機の高性能化に加え、膨大な高頻度データが入手可能となっている今日では、確率微分方程式モデルの統計推測法の開発が重要視されている。非線形時系列モデルの一種である確率微分方程式は統計的モデリングとして理論及び応用の両面において非常に興味深い統計モデルである。そして、離散観測に基づく確率微分方程式モデルの統計推測法の研究は、確率解析学と統計科学を融合させ、高頻度データ解析への応用を目指す研究であり、国際的に見ても、統計科学の重要な研究課題の一つと言える。

### 2. 研究の目的

時間とともに変化するランダムな現象を捉えるための連続時間確率過程モデルとして、確率微分方程式モデルが用いられているが、連続的に観測されたデータ（連続パスデータ）を得ることは一般には不可能である。そこで統計解析を行う際は、離散的に観測されたデータ（離散観測データ）に基づいた統計手法を用いることになる。しかしながら、非線形性や非正常性を有する確率微分方程式は表現力豊かで適用範囲が広がる反面、離散観測データに基づく尤度関数を陽に表現することができないため、強力な統計解析手法である尤度解析を一般には適用できなくなる。そこで、確率微分方程式モデルの場合、擬似尤度関数（尤度関数を近似した関数）を用いた擬似尤度解析が中心的な役割を果たすことになるのであるが、未だ確率過程の擬似尤度解析が整備されているとは言えない状況である。同様に擬似尤度関数に基づいたベイズ型推測法の発展も急務である。本研究の目的は確率微分方程式によって定義される拡散過程モデルやジャンプ型拡散過程モデル、そしてレヴィ駆動型確率微分方程式モデルなどに対する有効な統計推測法を開発し、高頻度データ解析への応用を試みることである。

### 3. 研究の方法

有効な統計的推測法の一つに尤度関数に基づく尤度解析法があるが、離散観測に基づく確率微分方程式モデルの尤度関数は一般には陽に求めることができない。そこで、確率微分方程式モデルの有効な統計推測法を開発するために、確率微分方程式の重要なクラスである拡散過程・ジャンプ付き拡散過程・レヴィ駆動型確率微分方程式に対して、精度よい近似尤度関数（擬似尤度関数）や推定関数を構成する。さらに、それら擬似尤度関数や推定関数に基づく擬似尤度解析を整備し、最尤型推定量やベイズ型推定量の漸近的性質を証明する。一般に確率微分方程式に対す

る擬似尤度関数は複雑なため、最尤型推定量やベイズ型推定量の導出には数値計算上の問題が生じるので、これに対する有効な計算法を提案する。また、擬似尤度解析を用いた擬似尤度比検定統計量を構成し、その漸近的性質を解明する。これらの理論的結果を高頻度データ解析へ応用する。

### 4. 研究成果

#### (1) 拡散型確率過程のサンプリング問題

(1) 高頻度データに基づく確率微分方程式モデルのドリフトとボラティリティパラメータの適応的推測手法の改良およびそれから得られる3種類の適応的最尤型推定量や適応的ベイズ推定量の漸近分布・積率収束などの漸近的性質を証明した。

(2) 確率微分方程式のドリフトとボラティリティパラメータに対する適応的推定法を検定問題やモデル選択問題に応用した。

(3) 確率微分方程式モデルの推定量や検定統計量、情報量規準などの統計量を導出する際に、効率よく計算する手法として、ニュートン・ラフソン法を応用したハイブリッド・マルチ・ステップ(Hybrid Multi-Step, HMS)推測法を開発した。HMS法とは、ベイズ型推定量を初期推定量として採用し、擬似尤度関数によるスコア法を初期推定量の漸近的性質に応じて複数回適用した統計的手法のことである。規格化した擬似尤度関数に基づく温めたベイズ推定を初期推定量として採用することによって、最尤型推定量を計算する際に直面する最適化のための初期値選定問題から解放される。また、HMS推測法は統計モデルの構造（独立同一分布モデル、時系列モデル、確率過程モデル等）に依存しない汎用的な推測法である。

(4) 平成26年度の研究成果であるエルゴード的拡散過程のハイブリッド・マルチ・ステップ(HMS)推測法を非エルゴード的拡散過程に応用した。具体的には、非エルゴード的拡散過程のボラティリティパラメータを推定するために、オイラー・丸山近似に基づく擬似尤度関数による初期ベイズ推定量を用いてHMS推定量を導出し、それが漸近混合正規性およびモーメントの収束性を有することを証明した。また、数値実験によって、初期推定量の収束率に応じて、HMS推定量の漸近挙動が変化するという知見を得た。

(5) 微小拡散過程モデルのドリフトとボラティリティパラメータの最尤型推定量を導出するために、最初に適応的ベイズ型推定量を求めて、それを初期推定量として用いたハイブリッド型マルチステップ推定量を構成した。そして微小拡散過程における統計的確率場の大偏差不等式を示して、提案した推定量の漸近正規性やモーメントの収束性を証明した。

(6) 微小拡散過程のハイブリッド型推定において、初期ベイズ推定量の計算コストが問題であった。そこで、すべての高頻度データ

(フルデータ)を用いる代わりに縮小されたデータを用いてベイズ型推定量を導出して、それを初期推定量として採用した微小拡散過程のハイブリッド型マルチステップ推定法を開発した。そして、提案したハイブリッド型推定量が漸近正規性およびモーメントの収束性を有することを証明した。さらに、多次元微小拡散過程モデルの大規模数値シミュレーションによって、初期推定量の収束率に応じて、ハイブリッド型推定量の漸近挙動が変化するという知見を得た。

(7) エルゴード的拡散過程のドリフトとボラティリティパラメータのハイブリッド型推定量を導出するために、縮約データを用いた初期ベイズ型推定量を導出し、その漸近的性質を証明した。具体的には、最初に縮小データを用いてボラティリティパラメータの初期ベイズ型推定量を導出し、その後間引きデータを用いてドリフトパラメータの適応的ベイズ推定量を導出する。さらに、それらのベイズ型推定量を初期値として、ハイブリッド型マルチステップ推定量を構成し、その漸近的性質を証明した。さらに、高次元パラメータのエルゴード的拡散過程モデルの大規模数値シミュレーションを行い、提案した最適化手法が従来の最適化手法よりも計算コストおよび数値的安定性の両面において優れていることを実証した。

(11) レヴィ駆動型確率微分方程式に対する統計推測

(1) 夜間・昼休みの経済高頻度データへの影響を加味したボラティリティの推定手法を定式化し、実証分析でその安定性を示した。高頻度観測の下で、Normal inverse Gaussian 過程の尤度の局所漸近正規性を導出した。また、確率過程の自己規格化残差系列の漸近挙動を導出し、適合度検定への応用を提案した。

(2) 外生変数や別の要因(観測可能)も柔軟に取り込める Ornstein-Uhlenbeck 型回帰モデルや局所安定 Levy 過程で駆動される確率微分方程式モデルに対して、疑似最尤推定量の漸近混合正規性を導出した。回帰モデルの正規化推定(高次元モデルの疎推定)において統計的確率場の多項式型大偏差評価を導出し、例えば bridge 推定量などの、混合収束率を有する疎推定量の収束速度に関する評価を得た。

(3) レヴィ過程で駆動される確率微分方程式モデルにおける高頻度データ解析の基礎理論の構築として、特に正規型および非正規安定型の疑似尤度推定方式を軸とし、疑似最尤推定量の漸近分布の導出に関連する統計的確率場の極限定理や分布論を、事例研究と併せて研究した。また、レヴィ過程モデルからの大規模高頻度データに基づいた統計推測理論に関する総合報告をまとめた。

(4) 一般のレヴィ過程駆動型確率微分方程式モデルについて、二段階推定手法を構築し、漸近同時分布を導出した。また、局所安定型

モデルに関する非正規型疑似尤度解析についてこれまで得た結果の技術的な改良を行い、ノイズの変動指数がコーシー以上ウィナー過程未満の場合に統一的な正規条件の下で推定量の漸近混合正規性が得られることを示した。特に局所安定型レヴィ過程の場合に尤度比の局所漸近正規性を導出し、提案推定量が漸近有効であることを証明した。

(5) 高頻度観測される Levy 駆動型確率微分方程式モデルについて、正規型疑似尤度によるパラメトリック係数推定量、および残差系列を用いて Levy 測度の汎関数の推定量を段階的に構築し、それらの漸近分布を導出した。とくに、係数推定量を代入することで生じるバイアスを適切に補正し、漸近バイアスを除去した上で同時近似信頼集合の構成を可能とした。

(11) 高頻度データ解析

(1) 高頻度不規則に観測される連続セミマルチンゲールデータから、ドリフトの回帰係数を推定する問題を考察した。連続観測の場合の最尤推定量を自然に離散化して構成できる推定量は局所ガウス近似に基づく疑似最尤推定量と一致するが、この推定量は観測の不規則性の下で一次の漸近バイアスを持つことを示した。説明変数となる確率過程の増分の歪度推定量を用いて回帰のバイアス補正を構成した。

(2) 非線形なコスト制約の下での確率積分の離散化による平均2乗誤差を漸近的に最小化する問題を解決した。とくに確率積分を効率的にシミュレーションする方法を与えた。また確率微分方程式モデルに対する新しい強近似法を開発した。さらに、確率微分方程式の解そのものではなく、その積分値が高頻度に観測される隠れマルコフ型モデルを考察し、拡散係数に含まれる未知パラメータに対して Whittle 近似に基づく有効な推定量を構成し、その漸近混合正規性を証明した。

(3) 確率微分方程式モデルにおける二次変動推定量について、最も標準的な実現ボラティリティが許容的ではないことを示し、推定の平均二乗誤差を改善する縮小推定量を構成した。この推定量はボラティリティが定数の場合には許容的であるという意味で、最低限の最適性を持っている。平均二乗誤差の改善は二次のオーダーであり、ボラティリティ自身の変動が大きいほど改善幅も大きい。

(4) ボラティリティの縮小推定は、実現ボラティリティ統計量に1より小さい定数を乗じて縮小し、高次の有効性を改善するものである。前年度までに得られたブラウン運動モデルに対する結果を、非整数ブラウン運動やブラウン型半定常過程で駆動されるモデルへ拡張した。

(5) 非整数ブラウン運動など自己相似性を持つ連続時間ガウス過程の高頻度データに基づく統計的推定理論の構築として、離散時間定常ガウス過程に対して有効性が知られ

ている Whittle 近似を応用して、高頻度観測極限における擬似尤度に基づく漸近有効推定量を構成した。ボラティリティが非整数ブラウン運動で駆動される確率微分方程式モデルに対する高頻度データ解析へも応用し、ボラティリティ推定誤差を考慮した、ボラティリティのハースト指数推定量を提案した。また関連する実データ解析も行った。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 25 件)

1. Kaino, Y. and Uchida, M. (2018), Hybrid estimators for small diffusion processes based on reduced data, 査読有, *Metrika* (in press). DOI: 10.1007/s00184-018-0657-0
2. Kaino, Y. Uchida, M. and Yoshida, Y. (2017), Hybrid estimation for an ergodic diffusion process based on reduced data, 査読有, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, 49, 89-118.
3. Masuda, H. and Uehara, Y. (2017), Two-step estimation of ergodic Levy driven SDE, 査読有, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 20, 105-137. DOI: 10.1007/s11203-016-9133-5
4. Fukasawa, M. (2017), Short-time at-the-money skew and rough fractional volatility, 査読有, *Quantitative Finance*, 17, 189-198. DOI: 10.1080/14697688.2016.1197410
5. Nomura, R. and Uchida, M. (2016), Adaptive Bayes estimators and hybrid estimators for small diffusion processes based on sampled data, 査読有, *Journal of the Japan Statistical Society*, 46, 129-154. DOI: 10.14490/jjss.46.129
6. Kamatani, K. Nogita, A. and Uchida, M. (2016), Hybrid multi-step estimation of the volatility for stochastic regression models, 査読有, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, 48, 19-35.
7. Uchida, M. and Yoshida, N. (2016), Model selection for volatility prediction, 査読有, In Mark Podolskij, Robert Stelzer, Steen Thorbjørnsen, Almut E. D. Veraart (eds.) *The Fascination of Probability, Statistics and their Applications*, In Honour of Ole E. Barndorff-Nielsen, Springer. 343-360. DOI: 10.1007/978-3-319-25826-3
8. Cai, J. and Fukasawa, M. (2016), Asymptotic replication with modified volatility under small transaction costs, 査読有, *Finance and Stochastics*, 20, 381-431. DOI: 10.1007/s00780-016-0294-2
9. Kamatani, K. and Uchida, M. (2015), Hybrid multi-step estimators for stochastic differential equations based on sampled data, 査読有, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 18, 177-204. DOI: 10.1007/s11203-014-9107-4
10. Ivanenko, D. O. Kulik, A. M. and Masuda, H. (2015), Uniform LAN property of locally stable Levy process observed at high frequency, 査読有, *ALEA - Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, 12, 835-862.
11. Masuda, H. (2015), Parametric estimation of Levy processes, 査読有, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 2128, 179-286. DOI: 10.1007/978-3-319-12373-8\_3
12. Uchida, M. and Yoshida, N. (2014), Adaptive Bayes type estimators of ergodic diffusion processes from discrete observations, 査読有, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 17, 181-219. DOI: 10.1007/s11203-014-9095-4
13. Fujii, T. and Uchida, M. (2014), AIC type statistics for discretely observed ergodic diffusion processes, 査読有, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 17, 267-282. DOI: 10.1007/s11203-014-9101-x
14. Kitagawa, H. and Uchida, M. (2014), Adaptive test statistics for ergodic diffusion processes sampled at discrete times. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 査読有, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 150, 84-110. DOI: 10.1016/j.jspi.2014.03.003
15. Fukasawa, M. (2014), Efficient discretization of stochastic integrals, 査読有, *Finance and Stochastics*, 18, 175-213. DOI: 10.1007/s00780-013-0215-6
16. Uchida, M. and Yoshida, N. (2013), Quasi likelihood analysis of volatility and nondegeneracy of statistical random field, 査読有, *Stochastic Processes and their Application*, 123, 2851-2876. DOI: 10.1016/j.spa.2013.04.008
17. Kawai, R. and Masuda, H. (2013), Local asymptotic normality for normal

- inverse Gaussian Levy processes with high-frequency sampling, 査読有, ESAIM: Probability and Statistics, 17, 13-32. DOI: 10.1051/ps/2011101
18. Masuda, H. (2013), Asymptotics for functionals of self-normalized residuals of discretely observed stochastic processes, 査読有, Stochastic Processes and their Applications, 123, 2752-2778. DOI: 10.1016/j.spa.2013.03.013
  19. Masuda, H. (2013), Convergence of Gaussian quasi-likelihood random fields for ergodic Levy driven SDE observed at high frequency, 査読有, Annals of Statistics, 41, 1593-1641. DOI: 10.1214/13-AOS1121
  20. Masuda, H. and Yoshida, N. (2013), Edgeworth expansion for the integrated Levy driven Ornstein-Uhlenbeck process, 査読有, Electronic Communications in Probability, 18, 1-10. DOI: 10.1214/ECP.v18-2726
  21. Masuda, H. and Morimoto, T. (2012), An optimal weight for realized variance based on intermittent high-frequency data, 査読有, Japanese Economic Review, 63, 497-527. DOI: 10.1111/j.1468-5876.2011.00552.x
  22. Uchida, M. and Yoshida, N. (2012), Adaptive estimation of an ergodic diffusion process based on sampled data, 査読有, Stochastic Processes and their Applications, 122, 2885-2924. DOI: 10.1016/j.spa.2012.04.001
  23. 内田 雅之 (2017), 高頻度データに基づく確率微分方程式モデルのハイブリッド推定, 査読有, 統計数理, 65, 39-69.
  24. 深澤 正彰 (2017), 高頻度データに対する Whittle 推定, 査読有, 統計数理, 65, 71-85.
  25. 増田 弘毅 (2015), 非正規ノイズ型エルゴード過程の推定, 査読有, 日本統計学会誌和文誌, 44, 471-495.

[学会発表](計 72 件)

1. Uchida, M., Hybrid estimators for ergodic diffusion processes based on thinned data, CMStatistics 2017, Organized Invited Session (E0162): 2017/12/16, The Senate House, University of London, UK
2. Uchida, M., Hybrid type adaptive inference method based on dependent data (企画セッション講演), 2017 年度統計関連学会連合大会, 2017/9/6, 南山

大学 名古屋キャンパス

3. Uchida, M., Hybrid estimators with initial Bayes estimators for small diffusion processes based on reduced data, Asymptotical Statistics of Stochastic Processes XI (SAPS XI), 2017/7/21, New Peterhof (Steklov Mathematical Institute), 34 St Petersburg Prospekt, Peterhof
4. Uchida, M., Hybrid type estimation for ergodic diffusion processes based on reduced data, The 1st International Conference on Econometrics and Statistics (EcoSta 2017), Organized Invited Session (E0236): 2017/6/16, The Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong
5. Fukasawa, M., At-the-money short-term asymptotics under stochastic volatility models, Advances in Financial Mathematics (招待講演), 2017/1/11, パリ
6. Uchida, M., Hybrid estimators for discretely observed small diffusion processes, CMStatistics 2016, Organized Invited Session (E0113): 2016/12/10, The Higher Technical School of Engineering, University of Seville, Spain
7. Uchida, M., Bayes type estimators and hybrid estimators for diffusion processes based on reduced data, Workshop in honor of Yury Kutoyants' 70th birthday, 2016/9/8, Laboratoire Manceau de Mathematiques, Universite du Maine, Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, Cedex 9, France
8. Uchida, M., Hybrid type estimation for diffusion type processes based on high frequency data, The 4th IMS-APRM, Session DL14, 2016/6/30, The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong
9. Uchida, M., Adaptive estimation for small diffusion processes, DYNSTOCH Meeting 2016, 2016/6/9, University Rennes 2, Campus Villejean, Rennes, France
10. Masuda, H., On Asymptotics of multivariate non-Gaussian quasi-likelihood, The 4th Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting (招待講演), 2016/6/28, The Chinese University of Hong Kong, China
11. Fukasawa, M., Volatility derivatives and model-free implied leverage, International conference on Monte Carlo techniques (招待講演), 2016/7/5, パリ
12. Fukasawa, M., Hedging under

- endogenous permanent market impacts, At the Frontiers of Quantitative Finance (招待講演), 2016/6/28, エジンバラ
13. Uchida, M., Hybrid multi-step estimation for non-ergodic diffusion processes, 60th World Statistics Congress ISI2015, Special Topic Paper Session(STS364):2015/7/30, Riocentro, Barra da Tijuca, Rio de Janeiro, Brazil
  14. Uchida, M., Hybrid multi-step estimators of the volatility for non-ergodic diffusion type processes, DYNSTOCH Meeting 2015, 2015/5/28, Centre for Mathematical Sciences at Lund University, Sweden
  15. Masuda, H., Computational aspects of estimating Levy driven models, The 9th IASC-ARS conference (招待講演), 2015/12/19, Stephen Riady Centre in University Town of National University of Singapore
  16. 内田 雅之, 確率微分方程式のハイブリッド型推定法とモデル選択への応用(企画セッション講演), 2015 年度統計関連学会連合大会, 2015/9/7, 岡山大学 津島キャンパス
  17. 内田 雅之, 拡散過程の適応的推測法と高頻度データ解析への応用, 第9回日本統計学会春季集会, 企画セッション: 2015/3/8, 明治大学中野キャンパス
  18. 増田 弘毅, On approximate self-normalized residuals in heteroskedastic model, 金融リスクのモデリングと制御 (招待講演), 2015/12/8, 学術総合センタービル, 東京
  19. Uchida, M., Hybrid multi-step estimators for diffusion processes, The 3rd IMS-APRM, Topic-Contributed Paper Session:2014/7/3, Howard International House, Taiwan
  20. 深澤 正彰, 高頻度データに対する Whittle 尤度, 日本数学会, 2014/3/15, 学習院大学
  21. Uchida, M., Adaptive Bayes type estimation for stochastic differential equations based on high-frequency data, 7th International Conference on Computational and Financial Econometrics (Invited talk), 2013/8/29, Hong Kong, China
  22. 内田 雅之, 拡散過程モデルにおける適応型計算統計, 統計関連学会連合大会 (Invited talk), 2013/9/10, 大阪大学
  23. 内田 雅之, 確率微分方程式の統計的モデリング, 統計関連学会連合大会 (Invited talk), 2013/9/9, 大阪大学
  24. Uchida, M., Adaptive estimation for discretely observed ergodic diffusion processes, The 2nd Institute of Mathematical Statistics Asian Pacific Rim Meeting (Invited talk), 2012/7/6, エポカルつくば
  25. Masuda, H., Non-Gaussian quasi likelihood in estimating jump SDE, The 2nd Institute of Mathematical Statistics Asian Pacific Rim Meeting (Invited talk), 2012/7/3, エポカルつくば
  26. 内田 雅之, 金融モデルに対する適応型統計推測理論および高頻度データへの適用, 統計関連学会連合大会, 2012/9/15, 北海道大学
  27. 増田 弘毅, On self-normalized residual sequence of SDE, 日本数学会秋季総合分科会 2012, 2012/9/20, 九州大学
  28. 増田 弘毅, On asymptotic behavior of self-normalized residual sequence, 統計関連学会連合大会, 2012/9/10, 北海道大学
  29. 深澤 正彰, 確率積分の離散データによる近似について, 統計関連学会連合大会, 2012/9/10, 北海道大学
6. 研究組織
- (1)研究代表者  
内田 雅之 (UCHIDA, Masayuki)  
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授  
研究者番号: 70280526
  - (2)研究分担者  
吉田 朋広 (YOSHIDA, Nakahiro)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 90210707
- 増田 弘毅 (Masuda, Hiroki)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号: 10380669
- 深澤 正彰 (FUKASAWA, Masaaki)  
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授  
研究者番号: 70506451