

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 9 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24300267

研究課題名(和文) 小学校から中学校への移行期における算数・数学科学習・教授軌道の開発と評価

研究課題名(英文) Development and Assessment of Learning-Teaching Trajectory in Mathematics during Transitional Grades

研究代表者

大谷 実(Ohtani, Minoru)

金沢大学・学校教育系・教授

研究者番号：50241758

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、小学校から中学校への移行期における関数領域の学習・教授軌道を、大学研究者と小中学校教師との協働による縦断的研究を通して実証的に明らかにし、その成果を踏まえて算数と数学の接続性を高める学習指導と評価の指針を提言した。本研究の成果は以下の3点である。1. 関数領域において小学校5年から中学校2年の仮説的な学習・教授軌道を検討した。2. 中学校第1・第2学年で、研究者と熟練教師の協働による、仮説的な学習・教授軌道に基づく教授実験を設計し実施した。3. 学習臨床的手法による児童・生徒の思考過程分析に基づく、学習・教授軌道の障害地点の解明とその克服の手立てを提案を行った。

研究成果の概要(英文)：This research proposed a hypothetical learning-teaching trajectory in function during transitional mathematics from elementary to secondary so as to suggest alternative approach to enhance articulation between elementary and junior secondary mathematics teaching and assessment. We organized a collaborative team with researcher and expert practitioners in both schools so as to organize design research and to make qualitative analysis of the teaching experiment. Main results of the research are: (1) a hypothetical learning-teaching trajectory of function in grades 5 to 8; (2) development of a reform unit design and method of teaching experiment; (3) identification of critical obstacles in the trajectory and proposal for promising strategy to design learning environment in which discourse and ICT play crucial roles.

研究分野：Mathematics Education

キーワード：科学教育カリキュラム 数学教育 学習・教授軌道 デザイン研究

1. 研究開始当初の背景

(1) 小学校から中学校への移行は、螺旋的な学びを重視する新学習指導要領の全面实施とともに、その重要度が増している理論的・実践的課題の一つである。実際、小学校算数から中学校数学への長期間にわたる移行期において、学習内容および知的発達に関して容易には解消できない大きな質的变化が生じていることが指摘されていたが、その解決につながる有望なアプローチがなかった。

(2) 近年「学習・教授軌道」と呼ばれる理論が提唱され、数年間にわたる児童・生徒の思考の変容過程と質的転換が研究されはじめた。

2. 研究の目的

(1) 本研究の目的は、小学校から中学への移行期における児童・生徒の数学的思考の質的変容過程を「学習・教授軌道」という考えを取り入れ関数領域を内容とし、大学研究者と小中学校教師との協働による縦断的研究を通して実証的に明らかにし、その成果を踏まえて算数と数学の接続性を高める学習指導と評価の指針を提言する。

(2) 本研究では、3つの研究課題を解決することを目的とした。小学校第5学年から中学校第2学年の教材分析に基づく、関数領域における仮説的な学習・教授軌道の構成。研究者と熟練教師の協働による、仮説的な学習・教授軌道に基づく教授実験の設計と実施。学習臨床的手法による児童・生徒の思考過程分析に基づく、学習・教授軌道の解明。

3. 研究の方法

(1) 研究課題 に関しては、小学校5年から中学校2年の関数的内容に焦点を当て、教材分析、児童・生徒の思考水準、学習環境等を配慮しつつ、比例、反比例、一次関数に関する仮説的な学習・教授軌道を構成した。その際に、次の4つの下位課題に取り組むんだ。算数と数学の接続に関する内外の研究と新学習指導要領の教材分析。関数的内容における内外の研究の整理。「学習・教授軌道」の研究成果の概観。関数的内容における仮説的学習・教授軌道の構成。

(2) 研究課題 と については、並行してその達成を試みた。すなわち、小中の熟練教師と協働し、仮説的な学習・教授軌道に基づく教授実験を実施する。その際、学習臨床的な手法により、個の活動についてのデータ収集を行う。また、授業における個の活動と思考の発達の様相を分析し、関数領域における学習・教授軌道を解明するとともに、移行期における関数的思考育成のための示唆を得た。具体的には、以下の下位課題に取り組んだ。仮説的学習・教授軌道に基づく教授実験のデザインと実施。学習臨床的手法に基づく個の

活動の分析方法の検討。教授実験のデータ分析に基づく学習・教授軌道の解明。

4. 研究成果

(1) 研究課題 に関しては、以下のような関数領域における仮説的な「学習・教授軌道」を構成した。小学校では、5年で簡単な比例を学び、6年で正式に比例・反比例を学ぶ。ここで、反比例は比例と対比するものとして学び、比例の理解の深まりをめざしている。比例の基本的な考えは、かけ算の学習から暗黙的に用いられており、小数・分数の乗・除の立式における考え方の基礎になり、単位当たりの大きさ・割合・比・面積や体積・公式等においても意識されうる。小学校では、正の有理数の範囲で比例の一般的な諸性質を見出すことが主要な学習内容となっている。そこでは、伴って変わる数量を具体的に検討した後に整理された数表を取り上げ、それを用いて内比により、すなわち、「 x の値が2倍、3倍、・・・になると、それにもなって y の値も2倍、3倍、・・・になる」により比例を定式化する。その後、グラフと公式としての一般的な計算(操作)方法として式が指導される。この意味で、小学校では数表を通じた比例の学習が中心となる。中学校の比例の学習指導では、数表の重要性は軽減され、式が優勢となる。実際、比例は式によって再定義される。小学校で計算操作であった式が、中学校では比例の諸性質の中で際立ち、性質の集合の「ラベル」となる。実際、式に基づいて数表の仕組みが説明され、グラフが作成され、比例関係を式に表すことや、与えられた式に対応するグラフを選ぶことが課題とされる。数表から式へと組織化原理が変更されることが学習・教授軌道のポイントとなる。その際、比例の味方において2つの意味の変更がなされる。一つは内比に基づく定式化から外比に基づく定義への見方の変更である。もう一つは、比例を関数として、すなわち「一方が 倍になると他方も 倍になる」ということから「一方を決めれば他方は一意に決まる」という見方をする。さらに、式は値を求める一般的な規則から静的対象となる。さらに、「比例 $y = ax$ は、・・・」という主語として式の表現を使用し、それまでの共变的な関係から、変数の従属変数 y と独立変数 x を意識的に区別し、「 y は x の関数である」という見方や言い方ができなければならない。さらに、中学校2年の一次関数 $y = ax + b$ では、 y や x からパラメータ a や b に焦点が移り、それを視点として変化や対応の特徴を考察することになる。このように、比例だけをとってもその学習・教授軌道は極めて複雑な見方の変更が含まれている。

(2) 研究課題 に関しては、 の仮説的学習・教授軌道に基づき、中学校第1学年と第2学年における単元をデザインし、公立の中学校の同一教師により教授実験を行った。授

業でのデータ収集では、教室に授業の全般的相互行為が視野におさめられるよう教室の後方にビデオカメラを1台設置するとともに、抽出生徒の活動を記録するための超小型のビデオカメラを設置した。この超小型カメラにより、授業中の生徒個人の活動や発話をリアルタイムで記録することができた。授業後は、抽出生徒のワークシートのPDFを保存した。収集したデータ並びに生徒のワークシートは、ハードディスクに保存して共同研究者で共有して定期的に分析会議を開催した。分析の視点は2点あり、教室全体の教師の関数に関する談話の態様であり、もう一つは学習臨床の手法を用いた抽出生徒の学習活動の分析である。

(3) 研究課題 に関しては、主として中学校1年の比例・反比例の単元における教授実験を通して得られた授業データの学習臨床的手法による質的分析を通して、仮説的に構成した学習・教授軌道において、「関数」概念の導入による比例・反比例の意味の再構成を通じた関数の数学的対象の構成が極めて大きな障害であることが示唆された。本研究における授業データの分析から、教師が関数とは何かを極めて曖昧なままにしており、比例・反比例に関する個別の問題を扱う際にも、関数として捉えなおすという明確な言及がなされていないことが明らかになった。他方で、関数を知識として紹介はするが、既習の比例・反比例を再構成しないまま、旧い学習・教授軌道に留まったまま授業が進行していることが示唆された。そのことは、中学2年における一次関数の学習・教授軌道の進展を一層困難にしている最大の原因となっていると考えた。さらに、中学校1年で関数を定義する現在のわが国の指導で標準的に想定されている学習・教授軌道では、結局のところ、関数とは何かについて不明瞭かつ首尾一貫性が欠如しており、そのことが生徒の側の学習・教授軌道の進展を妨げる最も大きな障害であることが示唆された。

(4) 本研究では、学習・教授軌道の障害を特定し、それを克服するための改善案を提言するために、中学校における関数の単元構成を抜本的に見直し、中学校2年の一次関数において教授実験を実施した。本研究では、一次関数の授業において生徒が一次関数を数学的対象として考え・語ることを奨励するような単元を協働でデザインした。このデザインの要点は2点あり、一次関数の語り方に首尾一貫性を持たせること、ICT環境を取り入れることにより関数自体の変量の動的考察を奨励したことである。この関数の語り方に関して、本研究では、関数をいわゆる決めれば決まる「こと」という抽象的なとらえ方ではなく、具体的な変量として、すなわちオイラーの微分学の教科書における定義を採用した。それは、「別の量に依存しているあ

る量、つまり、他の量が変化するときに変化を受ける量はもとの量の関数と呼ばれる」というものである。また、式・表・グラフは関数の異種の痕跡、「影」とであると考え、関数と区別した。このように、提案した授業では、式・表・グラフそれぞれの影の一部分から、関数（量 x に依存しているある量 y ）の性質の現れ方（変化と対応の特徴）を考えた。具体的には、関数を「忍者」として擬人化し、式・表・グラフは、忍者が走った際に垣間見える影であると考えた。忍者自身はめったに姿を見せないが、表・式・グラフで影を残すので、変化と対応を視点としてわずかな影の情報から、忍者を区別できるようになることを目当てとし、やがては忍者が仮想的にでも存在するような気持ちを生徒が持ち、関数それ自体について語ることを期待した。このICT環境に関して、他の量が変化するとき変化を受ける量を強調するために、本研究では、動的数学ソフトウェアである GeoGebra のアプレットを作成し、タブレットパソコンを使用して生徒に触れさせた。例えば、関数とその表現を区別するために、グラフで y 軸上を忍者が定速で移動し、グラフとして影が累積的に現れるものを作成した（図1）。

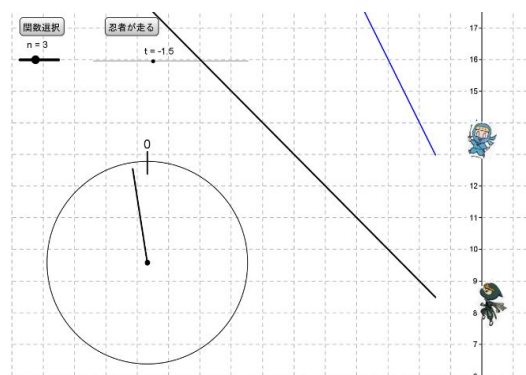


図1

この種のアプレットにより、関数とその表現の区別ができることを期待した。また、一次関数と反比例で変化のペースを同時に比較し、反比例では原点の近くで変化の割合が激しく変動し、原点から離れると緩慢になることを生徒が実感し、単に「変化の割合は一定でない」という以上の理解を得ることを期待した（図2）。

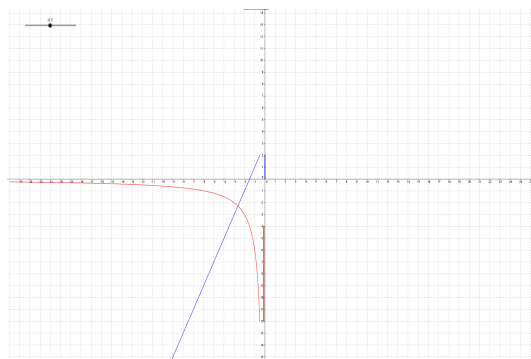


図2

このように動的環境でタブレットが組み込まれたタブレットを生徒が使用することで、変数それ自体やその変化の特徴を述べたり、未知の変数を予想したりする機会が増えることを期待した。

(5) ICT 環境下の教師の談話を評価した結果、教師の談話を取り出して分析を行ったところ、主として以下の2つの特徴が見出された。それらは、変数の個別化と特定場合への焦点化、グラフと式の語りの優勢化である。教授実験における教師の教室談話の評価から、いくつかの課題と改善のための示唆が得られた。第一に、中学校教員と大学教員が協働して実施した教授デザインでは、関数のとらえ方を定め、変数の変化を強調するために ICT の動的環境を導入した。しかしながら、協働研究の視点において、ICT の動的環境に適合する関数の語りについてデザインすることが不十分であった。他方で、ICT の動的環境に適合する関数の語りは、筆者らにとって、いわば「ミッシングリンク」のままである。第二に、一次関数の利用場面での談話は、個別・具体的な数量の関係から式の代数的処理や図形の性質という関数の表現手段に関する語りへと早急に移行し、関数それ自体を対象とするような語りが少なくなっている。関数の授業では、「関数」という用語が使用される場合でも、それは関数を数学的对象としているというよりもむしろ個別・具体的な数量の関係を参照しており、いわば「シネクドキ(提喻)」的な状態であることが分かった。このことに鑑み、関数の変化の特徴自体を談話の対象とし、談話のレベルを漸次上昇させる主導的談話の在り方を検討することが今後の課題となる。さらに、授業での教師の談話が使用している教科書の構成からも影響を受けていると考えられ、現行教科書で意図されている問いの分析も課題になる。以上が、本科研で得られた成果と課題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 17 件)

- (1) 布川和彦. 関数の対象としての成立を視野に入れた教科書の試案. 上越数学教育研究, 査読無, 30, pp.1-12. 2015.
- (2) 日野圭子. 小中移行期の生徒の比例の概念発達を促す授業のデザインに向けて, 宇都宮大学教育学部紀要, 査読無, 65(1), pp. 81-96. 2015.
- (3) Comparing multiple solutions in the structured problem solving: Deconstructing Japanese lessons from learner's perspective. Hino, K. Educational Studies in Mathematics, 90, 121-141. 査読有. 2015.
- (4) 小中移行期の生徒による比例関係の認識とその表現: 個別インタビューによる生徒の追跡を通して, 日野圭子, 日本数学教育学会誌数学教育学論究臨時増刊, 96, pp.

- 145-152, 査読有, 2014.
- (5) 小中移行期の生徒による比例の問題場面の表現: 個別インタビューにおける共通問題への応答の比較, 日野圭子, 都宮大学教育学部紀要, 査読無, 64 巻 1 号, 95-110 頁, 2014.
- (6) 中学校数学における関数の対象としての構成(2): 教科書の利用場面に焦点を当てて, 布川和彦, 上越数学教育研究, 査読無, 33 巻, 1-12 頁, 2014.
- (7) 中学校数学における関数の対象としての構成: 教科書の構成を中心に利用場面に焦点を当てて, 布川和彦, 上越教育大学研究紀要, 33 巻, 85-96 頁, 査読無, 2014.
- (8) The teacher's role in guiding children's mathematical ideas toward meeting lesson objectives. Funahashi, Y. & Hino, K. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 46, 査読有, pp. 423-436, 2014.
- (9) オランダの数学科教科書における PISA 型活用力育成のための内容分析, 大谷実, 中央教育研究所教科書フォーラム, 査読無, 30-41 頁, 2013.
- (10) 中学校入学初期における生徒の比例的推論の多様性: 筆記調査の結果と示唆, 日野圭子, 宇都宮大学教育学部紀要, 査読無, 第 63 号, 117-129 頁, 2013.
- (11) 数学: 「パターンの科学」の捉え方と学校数学の関係の検討, 布川和彦, 上越教育大学研究紀要, 査読無, 第 32 号, pp.169-180. 2013.
- (12) 比の学習における小学生による説明と式の利用. 布川和彦, 上越数学教育研究, 査読無, 第 28 号, pp. 1-12. 2013.

〔学会発表〕(計 14 件)

- (1) Classroom discourse that affects reification of a mathematical object: The case of function. Nunokawa, K., Ohtani, M., Hiko, K. In Vostro Yu, C. (Ed.). *In pursuit of quality mathematics education for all: Proceedings of the 7th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education*. Philippine Council of Mathematics Teacher Educators, Inc. 査読有. pp. 425-432. 2015. Waterfront Hotel, Cebu, The Philippines, May, 13.
- (2) ディスコースを視点とした数学的对象の構成: 一次関数のデザイン実験の試み. 大谷実, 布川和彦, 日野圭子, 漢野有美子. 日本数学教育学会第 47 回秋期研究大会(口頭発表). 査読無. 2014. 信州大学教育学部, 長野県長野市, 11 月 8 日.
- (3) 関数の学習における対象の成立に関わる一考察: 教科書の利用場面に焦点を当てて, 布川和彦, 日本数学教育学会第 47 回秋期研究大会(口頭発表), 査読無, 2014. 信州

- 大学教育学部,長野県長野市, 11月8日.
- (4)Interactive construction of attention paths toward new mathematical content: Analysis of a primary mathematics lesson. Hino, K., & Koizumi, Y. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), Proceedings of the PME 38/PME-NA 36 (3), 査読有, pp. 305-312. Vancouver, Canada, 2014. University of British Columbia, Bancoover, Canada, July, 18.
- (5)Principles and frameworks for task design within and across communities, Carolyn Kieran, Michiel Doorman, Minoru Ohtani, *Proceedings of ICMI Study 22: Task design in mathematics education*. University of Oxford, 査読有, pp. 419-420, 2013. University of Oxford, Oxford, UK, July, 23.
- (6)算数と数学の接続をはかる実践家と研究者の協働的デザイン研究. 大谷実, 日本数学教育学会, 第46回秋期研究大会(招待講演), 査読無, 11-20頁, 2013. 宇都宮大学教育学部, 栃木県宇都宮市, 11月16日.
- (7)中1生徒による比例の問題場面の表現に関する考察. 日野圭子, 日本数学教育学会第46回秋期研究大会(口頭発表), 査読有, 299-302頁, 2013. 宇都宮大学教育学部, 栃木県宇都宮市, 11月16日.
- (8)Collaborative creation of lesson framework and its impact on teachers' professional development. Hino Keiko, Makino Tomohiko, Proceedings of the 6th East Asia Regional Conference on Mathematics Education, 査読有, Vol. 3, pp. 135-143, Phuket-Thailand, 2013. Prince of Songkla University Phuket Campus, Phuket, Thailand, March, 20.
- (9)Students creating ways to represent proportional situations: In relation to conceptualization of rate. Hino Keiko, In T. Y., Tso (Ed.), Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 査読有, Vol. 2, pp. 283-290, 2013. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, July, 19.
- (10)中1生徒による式の生成における比例的推論の影響: 個別インタビューの結果の考察から, 日野圭子, 日本数学教育学会第45回数学教育論文発表会論文集, 査読有, Vol. 2, 653-658頁, 2013. 奈良教育大学, 奈良市, 11月10日.

[図書](計8件)

- (1)Task Design in Mathematics Education: an ICMI study 22. Watson, A., & Ohtani, M. (Eds.). 査読有. Springer. 2015. pp.1-336.
- (2)Nunokawa, K. Developments in research

- on mathematical problem solving in Japan. In B. Sriraman et al. (Eds.), The first sourcebook on Asian research in mathematics education (pp.155-158). Charlotte, NC: Information Age Publishing. 査読有. 2015.
- (3)Nunokawa, K. Another Perspective for Discussing Students' Understanding of Mathematics: Construction of Objects of Thought. In A. M. Columbus (Ed.), Advances in psychology research (pp. 129-150). Hauppauge, NY: Nova Science Publishers. 査読有. 2015.
- (4)Research on proportional reasoning in the Japanese context. Hino, K. In B. Sriraman et al. (Eds.), The first sourcebook on Asian research in mathematics education (pp. 1323-1352). Charlotte, NC: Information Age Publishing. 査読有. 2015.
- (5)Construction zone for the understanding of simultaneous equations: An analysis of one Japanese teacher's strategy of reflecting on a task in a lesson sequences. Minoru Ohtani, In Frederick K. S. Leung et.al, (Eds.). *Algebra teaching around the world*, Sense Publishers, 査読有, pp. 113-128, 2014.
- (6)Student voice in mathematics classrooms around the world, Berinderjeet Kaur, Glenda Anthony, Minoru Ohtani, David Clarke (eds.), 査読有, Sense Publishers, pp. 1-250, 2013.

6. 研究組織

(1)研究代表者

大谷 実 (OHTANI, Minoru)
金沢大学・学校教育系・教授
研究者番号: 50241758

(2)研究分担者

日野 圭子 (HINO, Keiko)
宇都宮大学・教育学部・教授
研究者番号: 70272143

(3)研究分担者

布川 和彦 (NUNOKAWA, Kazuhiko)
上越教育大学・学校教育研究科・教授
研究者番号: 60242468