

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24310115

研究課題名(和文) 多次元確率過程の漸近特性と待ち行列ネットワークの安全設計

研究課題名(英文) Asymptotic behaviors of a multidimensional stochastic process and their applications for safety design of a queueing network.

研究代表者

宮沢 政清 (Miyazawa, Masakiyo)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：80110948

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,000,000円

研究成果の概要(和文)：モデルパラメータが比較的少ない多次元SRBM(セミマルチンゲール反射型ブラウン運動の略)は待ち行列ネットワークの近似確率過程としてよく使われるが、特殊な場合を除き特性がよくわからない。本研究では、SRBMの定常分布の漸近特性を求めると共に低次元への分解可能性を調べた。更に近似モデルとしての妥当性を調べるため、より現実的なモデルである一般化ジャクソンネットワークについて2ノードの場合に定常分布の裾の減少率を求め、高負荷時にSRBMの対応する減少率に収束することを証明した。これらの結果に基づき、待ち行列ネットワークにおける大きな待ちの発生メカニズムを解明し、安全設計のための指標を得る方法を与えた。

研究成果の概要(英文)：A multidimensional semi-martingale reflecting Brownian motion, SRBM for short, has been used for approximating a queueing network as a simple model with relatively less modeling parameters. However, its properties are not well studied except for special cases. We study asymptotic behaviors and decomposability of its stationary distribution. The SRBM is known as a process limit of the joint queue length process of a generalized Jackson network, which is known as a more realistic queueing network model, in heavy traffic. We give more credit about this approximation by proving that the tail decay rates of their stationary distributions are asymptotically identical in heavy traffic. Based on those studies, we give procedures to see how large queues arise in the queueing network, which provide various measures for safety design of the queueing network.

研究分野：待ち行列理論, 応用確率過程, 大偏差値理論

キーワード：待ち行列ネットワーク 安全設計 稀少事象 多次元ブラウン運動 定常分布の漸近特性 マルコフ変調過程 大偏差値理論 国際研究者交流

1. 研究開始当初の背景

情報通信，流通システム，生産システムなどのネットワーク型のシステムは，社会生活や産業活動の基盤として広く使われている。しかし，ランダムな要因を含むために過大な負荷や大きな待ちが発生することがある。これらの過負荷を最小化する安全なシステムを設計することは，高いサービス品質や安全な運用を保証する上で今後益々重要になっていくと思われる。

しかし，ネットワーク型システムは数学的に複雑なため理論的な研究が困難であり，これまではシミュレーションや数値計算などにより個別に問題を検討する方法が主に行われてきた。一般に過負荷は余り起こらないが起ると影響が大きい混雑現象の要因である。このように起こることがまれな事象を稀少事象と呼ぶ。この稀少事象が起こる確率をシミュレーションなどにより求めることは一般に困難であり，その漸近特性が研究されてきた。一般的な理論として大偏差値理論があるが，ネットワークシステムのような多次元問題に対しては具体的に役立つ解を求めることが難しい。ネットワーク待ち行列の稀少事象を定常分布の漸近特性を使って調べる研究も行われてきた。しかし，理論が十分に発展していない。以上のことから，一般的かつ合理的な設計方針の理論的な研究を行うことが困難であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は，システムを待ち行列ネットワークによりモデル化し混雑現象を解明して，ネットワークシステムの安全な設計と効率的運用のための基礎的理論を構築することである。本研究では，待ち行列ネットワークの本質的特性を取り出して反射壁のある多次元ブラウン運動を含む各種の多次元確率過程で表し，定常分布の漸近特性を求める。この結果を使い，大きな待ち行列の発生確率を評価しモデルパラメータの影響を明らかにして，安全設計を行うための理論的な方法の基礎を作る。

3. 研究の方法

(1) 待ち行列ネットワークを表すモデルとして，解析的に扱いやすいジャクソンネットワークが広く使われている。このネットワークでは，各ノードにおいて，客が外部からポアソン過程（到着間隔が独立で同一の指数分布に従う計数過程）に従い到着し，先着順に独立で同一の指数分布に従うサービス時間によってサービスを受け，与えられた確率で次のノードを選ぶか，または，外部へ退去する。モデルを決めるパラメータは，客の各ノードへの到着率，各ノードでのサービス率，各ノードから退去時に次のノード選ぶ確率

（経路選択確率と呼ぶ）である。このモデルの各ノードにいる客数は，連続時間マルコフ連鎖により表すことができる。このマルコフ連鎖が定常分布をもつ，すなわち，安定であるならば，定常分布は各ノードの周辺分布の積で表され（積形式と呼ぶ），各周辺分布は幾何分布となることが知られている。

ジャクソンネットワークにおけるポアソン到着や指数分布に従うサービス時間の仮定は現実的でないことが多い。そこで，到着間隔とサービス時間の分布を一般化したモデルが研究されてきた。このモデルを一般化ジャクソンネットワークと呼ぶ。この一般化モデルは現実によく当てはまるが，パラメータに分布を含むため複雑であること，定常分布の解析が困難であるなど問題点が多い。このため，モデルのパラメータが少ない近似モデルとして反射壁をもつ多次元ブラウン運動が研究され使われてきた。この確率過程は，Semimartingale reflecting Brownian motion，略して SRBM と呼ばれる。本研究では，この SRBM を用いてネットワークにおける混雑の解明を行う。しかし，この近似解析には次の2つの問題点がある。

(問題点 1) 多次元 SRBM の特性がよく分からない。例えばその定常分布を解析的に求めることが難しく，分布の裾の漸近特性も部分的にしか知られていない。

(問題点 2) SRBM は重負荷時において一般化ジャクソンネットワークを表す確率過程の極限として得られる。ここに，重負荷であるとは，各ノードにおいて窓口の利用率が1に近いことを表す。しかし，この極限が近似としてどの程度よいものか理論的な検証がほとんど無い。

(2) 本研究では，この2つの問題に対して次のように取り組む。問題点1については，問題を以下のように分けて研究を行った。

2次元 SRBM の定常分布の漸近特性についての既知の結果を精密化する。

2次元の結果を3次元以上の場合への拡張することは容易ではない。そこで，解析的に扱いやすい簡単なモデルから複雑なモデルへと理論を展開する。

得られた多次元特性を利用しやすいように図形などを使って表現する。

なお，SRBM が定常分布をもつ条件，すなわち，安定性条件は，4次元以上ではモデルパラメータで表すことが困難である。しかし，一般化ジャクソンネットワークを近似する SRBM は，反射壁の条件を表す反射行列 R が M -行列と呼ばれるクラスに入るため，安定性条件をモデルパラメータで簡単に表すことができる。この条件は，すべてのノードの窓口利用率が1より小さいという一般化ジャクソンネットワークの安定性条件に対応している。

(3) 問題点2については,SRBMの近似モデルとしての妥当性を調べるため,2ノード一般化ジャクソンネットワークの定常分布の漸近特性を求め,SRBMの漸近特性との比較を行う.この研究のためにマルコフ変調ネットワークに関する一般的な方法論を研究する.

(4) 問題点1と2の関連研究として,理論的な枠組みが近い各種の確率過程について,定常分布の裾の漸近特性を求め.また,漸近特性を用いた近似方法の研究や重い裾をもつ集団到着がある待ち行列ネットワークの研究を行う.これらの問題には直接SRBMと関係しないものもあるが,問題を多角的に見るために研究を行う.

4. 研究成果

前節の方法に従って研究を行い下記の成果を得た.なお,これら各項目の詳細については発表論文等を参照願いたい.

(1) SRBMの漸近特性:2次元の場合

2次元SRBMの定常分布の裾の漸近特性について,大偏差値理論における率関数を図により幾何的に求めた.また,座標軸上の定常密度関数の精密な漸近特性を求めた(Dai教授との共同研究,雑誌論文).関連研究として,2次元SRBMの定常分布が積形式をもつ,すなわち,1次元周辺分布の積となるための必要十分条件を幾何的に表現した.

2次元のSRBMを用いて,2ノードの待ち行列ネットワークを近似的に表すことができる.SRBMの率関数に関する幾何的な結果をこの2ノードネットワーク適用し,大きな待ち行列が最も起こりやすい標本路を図形的に求めた.例えば,大きな待ち行列 (x,y) (x をノード1の系内客数, y をノード2の系内客数とする)の発生には次の3パターンがある.

2つのノードの待ち行列が点 (x,y) へ向かって同時に大きくなる.

ノード1の系内客数のみ増加し,ある点 $(a,0)$ に到達した後,点 (x,y) へ直線的に向かう.このときノード2の系内客数は増加するが, $x < a$ ならばノード1の系内客数は減少する.

上記の2においてノード1と2を入れ換えた場合が起こる.

これらの場合の起こり方と a の値は,モデルのパラメータ(各ノードの到着間隔の平均と分散,サービス時間の平均と分散,各ノード差ピスを終了した客の経路選択確率)から作られた楕円と2つの直線から求められる.更に,図形からモデルのパラメータ,例えば,サービス時間の平均や分散が混雑の指標である定常分布の裾の減少率にどのように影響するかを視覚的にとらえることができる(Dai教授との共同研究,学会発表).

(2) SRBMの漸近特性:積形式をもつ場合

3次元以上のSRBMに対しては,定常分布の裾の減少率の上限しか得られていない.そこで手がかりを得るために,簡単な場合である定常分布が積形式となるSRBMについて調べた.3節(1)で述べたように,積形式とは定常分布が1次元の周辺分布の積となることをいう.

SRBMの次元を d により表す.定常分布が積形式をもつための必要十分条件として skew symmetric 条件が知られている.しかし,この条件は d 次元の行列で表された条件であり,直感的な意味が明確でない.この条件を d -次元ベクトル空間における超平面と d -次元空間の楕円により表した(Dai教授, Jian Wuとの共同研究,雑誌論文).この結果は,4節(1)の2次元SRBMの結果を拡張したものである.これらの幾何的表現から,3次元以上の場合の定常分布の漸近特性について手がかりが得られた.

(3) SRBMの漸近特性:分解可能性

多次元SRBMの応用では定常分布やその漸近特性が未知なため積形式を仮定することが多い.しかし,積形式が成り立つ条件はパラメータの制約が強く,実際のモデルとかけ離れてしまう.そこで,積形式を弱め,定常分布が2つの周辺分布の積になる(これを分解可能性と呼ぶ)場合の十分条件を求め,周辺分布が低次元のSRBMの定常分布に一致することを証明した(Dai教授, Jian Wuとの共同研究,雑誌論文).2次元のSRBMについては漸近特性が分かっているので,この結果を使うと,高次元のSRBMを分解することにより,積形式の場合より制約が少ない条件下でSRBMを応用できる.

(4) 大きな待ちが発生する様子

これまでに述べた積形式と分解可能性の結果に基づき,積形式SRBMについて大きな混雑が発生する典型的な標本路(最適路と呼ぶ)を求めるアルゴリズムを予想した.これらの結果を基に最も起こりやすい大きな待ちの発生形態を最適化問題の解として幾何的に表現する研究を行い,論文として準備中である(Dai教授との共同研究).

(5) 一般化ジャクソンネットワーク

SRBMによるモデル化の妥当性を検証するためにより現実的なモデルである一般化ジャクソンネットワークについて2ノードの場合に,定常分布の漸近特性を調べSRBMの結果との比較を行った.ここに,サービス時間分布は軽い裾をもつ(裾が指数的に減少すること)を仮定する.この場合には定常分布も軽い裾をもつ.一般にSRBMの定常分布は軽い裾をもつので,サービス時間分布が軽い裾をもつことは,SRBMによる近似が妥当であ

るための必要条件とみることができる。なお、重い裾をもつ場合の待ち行列ネットワークについては、(6)の において報告する。

2 ノードの一般化ジャクソンネットワークの漸近特性についての先行研究では、直列型の周辺分布を除くと定常分布の裾の減少率の上限しか得られていない。一方、一般化ジャクソンネットワークは、マルコフ変調した反射壁をもつ2次元ランダムウォークの特別な場合である。ここに、マルコフ変調とは、マルコフ連鎖である背後過程により対象とする確率過程の状態推移をランダムに変えることをいう。このマルコフ変調反射型2次元ランダムウォークの定常分布の漸近特性が求められているが、数値計算が必要など、理論的研究に役立てることができない。

以上のことから一般化ジャクソンネットワークのマルコフ変調反射型ランダムウォークによる解析を再検討した。初めにネットワークモデルの複雑な境界条件を簡単に表すために、正準モデルという概念を作り、このモデルを使って、定常分布を決定する定常方程式の行列・ベクトル表現を得た。この方程式の解の漸近特性を求めめるためには、非負無限次元行列が3重対角ブロック構造をもつ場合に非負の右不変ベクトルをもつことが本質的であることが分かった。そこで、その存在のための使いやすい十分条件を見つけ、この条件の下でマルコフ変調反射型ランダムウォークの定常分布の漸近特性を求めた。この結果を使って、2ノードの一般化ジャクソンネットワークの漸近特性を求めることができた。この結果は現在論文として投稿中である (<http://arxiv.org/abs/1501.03913> から論文を取得可能)。

このようにして得られた漸近特性には次の特色がある。

定常分布の裾の減少率は、SRBM の場合の楕円に対応した閉じた凸曲線とSRBMの2つの直線に対応した凸関数から図形的に求めることができる。

上記の曲線は、到着を表す点過程とサービス時間分布に従う間隔をもつ再生過程の大偏差値理論におけるノードごとの率関数を使って表すことができる。

重負荷時において、一般化ジャクソンネットワークの系内客数ベクトルは拡散スケール変換と呼ばれる状態と時間の尺度変換の下でSRBMへ確率過程として弱収束することが知られている。また、安定な場合には、同じ条件の下で、定常分布の弱収束も証明されている。本研究の結果から、更に、定常分布の裾の減少率も収束する (雑誌論文)。

これらの結果は、重負荷時において、2ノード一般化ジャクソンネットワークを2次元

SRBMで近似することの妥当性を示している。更に、解析表現から、一般的な次元でも同様な結果が成り立つことが予想される。今後発展する可能性が大きい研究結果である。

(6) 関連待ち行列モデルの研究

反射壁のある2次元ランダムウォークにおいて各方向への変化量が1以下であると仮定し、定常分布の裾の漸近特性について既存の結果を精密化した (小林正弘との共同研究、雑誌論文)。変化量の仮定を各成分の増加方向に対して除いた場合について、定常分布の漸近特性を求めた (小林正弘との共同研究、雑誌論文)。これらの反射壁をもつランダムウォークにより、サービス窓口の協力や、外部から客が集団到着する拡張版ジャクソンネットワークにおいて、窓口間の協力や集団到着が定常分布の裾の減少率に及ぼす影響を調べることができた。

3次元以上の反射壁のある多次元ランダムウォークの特別な場合として到着客がk本の待ち行列から最小の待ち行列を選ぶモデルの定常分布の裾の漸近特性を得た。ここに、kは任意の2以上の整数であり、到着はポアソン分布に従い、各待ち行列のサービス時間は、待ち行列ごとに独立で同一の指数分布に従うと仮定する。この結果は、これまでk=2の場合にのみ得られていた漸近特性を飛躍的に拡張した (小林正弘、佐久間大との共同研究、雑誌論文)。

重い裾をもつ集団到着がある待ち行列は軽い裾をもつSRBMで表すことができないが、通信などの実際問題で現れる場合がある。従来の重い裾に関する研究は、解析的な難しさから、待ち行列が1つまたは直列型のモデルに限られていた。本研究では、ジャクソンネットワークのように循環する経路があるネットワーク待ち行列で、重い裾をもつ集団到着があるとき、各ノードの客数の定常分布の漸近特性を求めた (Foss教授との共同研究、雑誌論文)。

客を連続量により近似的に表す流体近似モデルも通信の問題で使うことがある。マルコフ変調流体待ち行列はその代表的な例である。しかし、この流体モデルもネットワークに拡張すると定常分布を得ることが難しい。また、定常分布の漸近特性の研究もほとんど無い。そこで、本研究では、マルコフ変調2次元流体待ち行列モデルの定常分布の減少率を求めた (論文を執筆中)。この研究の解析手法はその後一般化ジャクソンネットワークの漸近特性の研究に役立った。

漸近特性の理論的な結果を、モデルの近似に役立てる研究も行った。簡単な例として、2次元ランダムウォークについて解析的に魅力ある定常分布を求め近似解として使うことを考えた。このために2種類の定常分布に

ついて調べた．1 つは積形式となる定常分布をもつ場合で漸近特性の結果を使って周辺分布を決定した．数値実験であるが，漸近特性を使わない場合よりよい近似となっていることが確認した(Latouche 教授との共同研究，雑誌論文)．もう1 つでは，逆時間に関するある種の不変性を使って，近似として使う定常分布を求めた(小林正弘との共同研究，雑誌論文)．

(7) まとめ

以上のように，本研究により，大きな待ちの発生に対する漸近的な特性の解明を進めることができた．これらの結果はネットワークシステムの安全設計に役立てることができる．本方法の問題点は，SRBM を使うため確率過程の高度な専門知識がないと理解が難しいことである．そこで，SRBM について広く理解してもらうために総合報告的な論文を執筆した(雑誌論文)．既存の理論的な結果や本研究の成果を解説するだけでなく，従来の方を使わず直接的に SRBM の定常分布を導く方法を考案した．この方法も含め今後は，既存の理論や方法にとらわれない簡素化された新しい SRBM の導出やその定常分布の漸近特性の研究が更に発展することが望まれる．

最後に，助成金により本研究を進めることができたことに深く感謝いたします．

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計12件)

M. Miyazawa , Diffusion approximation for stationary analysis of queues and their networks: A review, Journal of the Operations Research Society of Japan , 査読有り , Vol. 58, 2015, pp.104-148.
http://www.orsj.or.jp/%7earchive/menu/01_58.html

J.G. Dai, M. Miyazawa and J. Wu, Decomposable stationary distribution of a multidimensional SRBM, Stochastic Processes and their Applications , 査読有り , Vol. 125, 2015, 1799-1820.
DOI:10.1016/j.spa.2014.11.014

M. Kobayashi, M. Miyazawa and H. Shimizu, Model reversibility of a two dimensional reflecting random walk and its application to queueing network, Probab. in the Engineering and Informational Sciences , 査読有り , Vol. 29, 2015, 1-25
DOI:10.1017/S0269964814000199

S. Foss and M. Miyazawa, Two-node fluid network with a heavy-tailed random input: the strong stability case, Journal of Applied Probability , 査読有り , Vol. 51A, 2014, 249-265
<http://projecteuclid.org/euclid.jap/1417528479>

J.G. Dai, M. Miyazawa and J. Wu, A multi-dimensional SRBM: Geometric views of its product form stationary distribution, Queueing Systems , 査読有り , Vol. 78, 2014, 313-335
DOI:10.1007/s11134-014-9411-0

M. Miyazawa Tail asymptotics of the stationary distribution for a two node generalized Jackson network, ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review archive , 査読有り , Vol. 42, 2014, Issue 2, 70-72
DOI:10.1145/2667522.2667545

G. Latouche and M. Miyazawa, Product-form characterization for a two-dimensional reflecting random walk, Queueing Systems , 査読有り , Vol. 77, 2014, 373-391
DOI:10.1007/s11134-013-9381-7

M. Kobayashi and M. Miyazawa, Tail asymptotics of the stationary distribution of a two dimensional reflecting random walk with unbounded upward jumps, Advances in Applied Probability , 査読有り , Vol. 46, 2014, 365-399
<http://projecteuclid.org/euclid.aap/1401369699>

M. Miyazawa, Reversibility in Queueing Models, the Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science , 査読有り , 2013
DOI:10.1002/9780470400531.eorms1079

M. Kobayashi, Y. Sakuma and M. Miyazawa, Join the shortest queue among k parallel queues: tail asymptotics of its stationary distribution, Queueing Systems , 査読有り , Vol. 74, 2013, 303-332
DOI:10.1007/s11134-013-9353-y

J.G. Dai and M. Miyazawa, Stationary distribution of a two-dimensional SRBM: Geometric views and boundary measures, Queueing Systems , 査読有り , Vol. 74, 2013, 181-217
DOI:10.1007/s11134-012-9339-1

M. Kobayashi and M. Miyazawa, Revisit to the tail asymptotics of the double QBD process: Refinement and complete solutions for the coordinate and diagonal

directions, Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読有り, Vol. 27, 2013, pp 145-185
DOI:10.1007/978-1-4614-4909-6_8

〔学会発表〕(計 18 件)

M. Miyazawa, SRBM, Geometric Views, and Optimal Paths, INFORMS Annual Meeting, 2014 年 11 月 10 日, San Francisco

M. Miyazawa, Diffusion approximation for multidimensional reflecting processes via their stationary equations, INFORMS Annual Meeting, 2014 年 11 月 14 日, San Francisco

M. Miyazawa, Quality of a diffusion approximation for a two node generalized Jackson network with respect to stationary tail probabilities, First European Conference on Queueing Theory, 2014, 8 月 21 日, Ghent 大学, ベルギー

M. Kobayashi, Structure-reversibility of a two dimensional reflecting random walk, First European Conference on Queueing Theory, 2014, 8 月 20 日, Ghent 大学, ベルギー

M. Miyazawa, Tail asymptotics of the stationary distribution for a two-node generalized Jackson network, Mathematical performance Modeling and Analysis, workshop of SIGMETRICS, 2014, 6 月 20 日, University of Texas, Austin

M. Miyazawa, Decomposable stationary distribution of a multidimensional SRBM, Stochastic Networks And Risk Analysis IV, 2014, 6 月 1 日, Bedlewo (Poland)

宮沢政清, QBD 型非負行列が優調和ベクトルをもつ条件: 一般化ジャクソンネットワーク漸近特性問題への応用, 日本オペレーションズ・リサーチ学会待ち行列研究部会, 2014, 4 月 19 日, 東京工業大学

M. Miyazawa, The convergence domain of the moment generating function of the stationary distribution of a three dimensional SRBM, Workshop for Modern probabilistic techniques for design and analysis of stochastic systems and networks, 2013, 8 月 16 日, Isaac Newton Institute, Cambridge, U. K.

M. Kobayashi, Tail asymptotics of the stationary distribution of a two dimensional reflecting random walk with unbounded upward jumps, INFORMS Applied Probability Society Conference, 2013, 7 月 16 日, コスタリカ

M. Miyazawa, Markov modulated two node fluid network: Tail asymptotics of the stationary distribution, INFORMS Applied Probability Society Conference, 2013, 7 月 16 日, コスタリカ

宮沢政清, 待ち行列ネットワークの性能評価: 漸近特性による研究の方法, 結果と課題, 日本オペレーションズ・リサーチ学会待ち行列研究部会, 2013 年 2 月 16 日, 東京工業大学

小林正弘, 2 重出生死滅過程の漸近特性, 日本オペレーションズ・リサーチ学会待ち行列研究部会, 2012 年 5 月 19 日, 東京工業大学

M. Miyazawa, A geometrical view on a multidimensional reflecting processes: Stability and tail asymptotics, 2nd International Conference on Stochastic Modeling and Simulation, 2012 年 12 月 18 日, Vel Tech (インド・Chennai)

M. Miyazawa, Stochastic networks and tail asymptotics: An approach by multidimensional reflecting processes, International conference on Mathematical Modeling & Applied Computing, 2012 年 7 月 13 日, Coimbatore 工科大学 (インド)

M. Miyazawa, Markov modulated two dimensional reflecting fluid process: Rough asymptotics of the stationary distribution, When Probability Meets Computation, 2012 年 6 月 8 日, ミラノ

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.rs.tus.ac.jp/miyazawa/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者
宮沢 政清 (MIYAZAWA, Masakiyo)
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号: 80110948

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
小林 正弘 (KOBAYASHI, Masahiro)
東海大学・理学部・講師
研究者番号: 90609356