様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 28 年　6 月　6 日現在

機関番号：14301
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：24340001
研究課題名（和文）概均質ベクトル空間のゼータ関数

研究課題名（英文）Zeta functions pf prehomogeneous vector spaces

研究代表者
雪江　明彦（Yukie, Akihiko）

京都大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：20312548

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　8,300,000円

研究成果の概要（和文）：p進整数環上の軌道の決定を目指していたが，そのための一歩として，完全体上必ずしも分裂でない簡約群の表現について，不安定点の集合のstratificationとその帰納的構造が基礎体上有理的に成り立つことを証明した。また，例外ジョルダン代数の対の空間の有理軌道を決定し，特に対応する octonion が分裂している場合には，有理軌道が基礎体の3次拡大と1対1に対応することを証明した。またそれに関連した equivariant map についても次数最小のものを構成した。

研究成果の概要（英文）：We were aiming at determining determining orbits over the p-adic integer ring. For that purpose, we considered representations of reductive groups which are not necessarily split over a complete field. We proved that the stratification and the inductive structure of the set of unstable points is rational over the ground field. Also we came up with an arithmetic interpretation of rational orbits of the space of paris of exceptional Jordan algebras. When the corresponding octonion is split, we proved that rational orbits correspond bijectively with cubic extensions of the ground field. Also we constructed the equivariant map of the lowest degree which is associated with this representation.

研究分野：整数論

キーワード：概均質ベクトル空間　有理軌道　局所ゼータ関数　密度定理

１．研究開始当初の背景

概均質ベクトル空間に関連した密度定理はこれまでもいくつか証明されてきた。ゼータ関数による方法では，局所ゼータ積分の一様評価が必要となる．これは 2 変数 3 次形式の空間の場合などいくつかの場合に示された．特に注目するのは変数の数が一般の場合の 2 次形式の空間である．この場合は Jordan 分解の概念があり，これを利用すると，局所ゼータ積分の一様評価が得られる．一方 Jordan 分解の概念は不変式論的に考えれば，p 進整数環上，還元する前は群の作用がよいが，還元すると作用が悪くなるような点に注目して記述することができる．そこで不変論な立場から局所ゼータ積分をとらえることが望まれていた．

２．研究の目的

概均質ベクトル空間に関する整数論には，大域ゼータ関数，局所ゼータ関数，有理軌道の解釈などさまざまな側面がある．これらのさまざまな面について研究するのが目的であるが，特に局所ゼータ積分の一様評価に至ることについて研究するのが目的である．そのため，上に述べたように，2 次形式の空間における Jordan 分解に対応する概念を他の概均質ベクトル空間の場合にも確立し，p 進体上の軌道を明示的に記述することが目的である．そのためには，還元した得られる有限体上の概均質ベクトル空間について，代数閉体上では知られている GIT stratification の概念を必ずしも分裂していない概均質ベクトル空間に拡張することが必要である．また，一方有理軌道の数論的解釈を決定する問題は常に有用であり，これらについて研究するのが目的である．

３．研究の方法

上で述べたように，還元したときに作用が悪くなる点を記述する必要がある．特に興味があるのは，代数体上の概均質ベクトル空間である．代数体の整数環を非アルキメデス付値で完備化すると有限局所体になる．局所体の整数環の剰余体は有限体で完全体である．だから完全体上の概均質ベクトル空間の作用が悪い部分を記述する必要がある．これは後で述べるように，表現が概均質という条件なしに(既約表現という条件もなしに)基礎体上完全に有理的に解決した．この結果を利用するとコンピューターで stratification を決定することができるが，それはこれからの課題である．

また，概均質ベクトル空間の有理軌道に関しては特に面白いのは E_8 のような大きい例外群から来ている場合である．後で述べるが，有理軌道に関して今回得られた結果も E_8 から来ている場合の１つである．このような問題では，一般の点の安定化群を決定しガロアコホモロジーによる考察を行うことが有効である．ただし，どの場合にもその場合に特有の現象があぁり，それを適切に処理することが必要であった．今回の場合以外にもまだ有用と思われる概均質ベクトル空間は残っており，それらの有理軌道を調べるのはこれからの課題である．

まだ今回の結果を使って局所ゼータ積分を評価するところまで行っていないが，それはこれからの課題である．

４．研究成果

(1) 不安定点の構造

k を完全体とする．k 上の代数群 G に対し GL(1)から G への準同型 1 パラメータ部分群という(以下 1PS と略す)．

$$X_*(G) = \mathrm{Hom}_k(GL(1),G),$$
$$X^*(G) = \mathrm{Hom}_k(G,GL(1))$$

をそれぞれ k 上定義された 1PS のなす群，G の指標のなす群とする．

G を k 上定義された簡約群，V を G の k 上の表現とする．S を G の極大分裂トーラス，T を S を含む k 上定義された極大トーラスとする．以下，

$$s = X_*(S) \otimes R,,$$
$$s^* = X^*(S) \otimes R$$

とする．また

$$s_Q = X_*(S) \otimes R$$

などとおく．

$$W(k) = N_G(S)/Z_G(S)$$

を相対ワイル群とする．

s, s^* の間には自然な双線形形式がある．s, s^* の元 λ, χ での値を $\langle\lambda, \chi\rangle$ とする．この双線形形式は非退化である．S 上には W(k) 不変な内積 (a,b) がある．この内積は有理的,つまり λ, χ がそれぞれ s_Q, s_Q^* の元なら $\langle\lambda, \chi\rangle$ の値は Q に入る．$||\lambda||_s$, $||x||_s^*$ をそれぞれの内積で定まるノルムとする． s_+, s^*_+ をそれぞれの Weyl chamber とする．

s の元 λ に対し，s^* の元 $\beta=\beta(\lambda)$ を全ての s の元 ν に対し

$$\langle\nu, \beta\rangle = (\nu, \lambda)$$

となる元とする．写像 $\lambda \to \beta(\lambda)$ は全単射でその逆写像を $\lambda=\lambda(\beta)$ とする．β が s^*_Q の元なら，a>0 を整数で $a\lambda(\beta)$ が $X_*(S)$の元となる最小のものとする．

$$\mu(\beta) = a\lambda(\beta)$$

とおく．s と s^* を同一視することにより，s^*にも W(k) 不変な内積

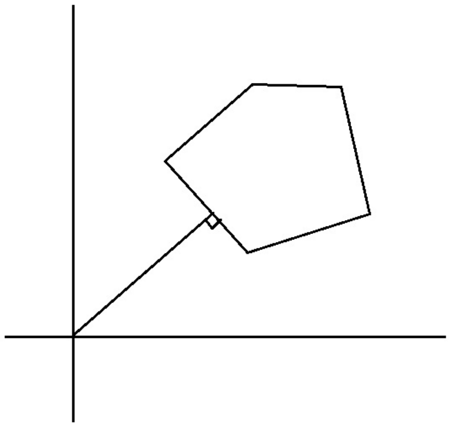
$$(\beta, \gamma)_*$$

が定まる．$||\beta||$ をこの内積で定まるノルムとする．

$$\pi: V-\{0\} \to P(V) \text{（射影空間）}$$

を自然な写像とする．G の作用に関する P(V) の半安定点全体の集合の π による逆像を V^{ss} とする．

S は分裂トーラスなので，その作用は対角化できる．そこで $v=(v_0,v_1,\cdots,v_N)$ を V の座標で，座標ベクトルが S の同時固有ベクトルであるものをとる．s^* の元 γ^i を i 番目の座標ベクトル e_i の weight とする．$\{\gamma_0,\cdots,\gamma_N\}$ の部分集合 I に対し，その convex hull を Conv_I とする．Conv_I が原点を含まないような I に対し，β を Conv_I の点で原点に一番近い点とする．すると，β は s^*_Q の元である．B をそのようにして得られた β で Weyl chamber s^*_+ に属するもの全体の集合とする．



B はコンピューターを使えば多くの場合計算可能な集合である．

B の元 β に対し，V の部分空間 Y_β，Z_β，W_β を次のように定める．

Y_β は $(\gamma_i,\beta)_* \geqq (\beta,\beta)_*$ となる e_i で張られた部分空間
Z_β は $(\gamma_i,\beta)_* = (\beta,\beta)_*$ となる e_i で張られた部分空間
W_β は $(\gamma_i,\beta)_* > (\beta,\beta)_*$ となる e_i で張られた部分空間

すると，Y_β は Z_β と W_β の直和である．

G の 1PS λ に対し，放物部分群 $P(\lambda)$ を $\lambda(t)p\lambda(t)^{-1}$ の $t\to 0$ の極限が存在するような p 全体よりなるものとする．$M(\lambda)$ を $P(\lambda)$ の Levy 部分，つまり，λ の中心化群とする．$\beta\in s^*$ に対し，

$$P_\beta = P(\lambda(\beta)),$$
$$M_\beta = M(\lambda(\beta))$$

とおく．

χ_β を M_β の有理指標でその S への制限が $b\beta$ (b>0)という形をしているものとする．G_β を

$$\{g\in M_\beta \mid \chi_\beta(g)=1\}$$

の単位元の連結成分とすると，G_β は Z_β に作用する．$P(Z_\beta)^{ss}$ を G_βの作用に関する $P(Z_\beta)$ の半安定点全体の集合とする．$P(Z_\beta{}^{ss})$ を P(V) の部分集合とみなし，

$$Z_\beta{}^{ss} = \pi^{-1}(P(Z_\beta)^{ss}),$$
$$Y_\beta{}^{ss} = \{(z,w) \mid z\in Z_\beta{}^{ss},\ w\in W_\beta\},$$
$$P(Y_\beta)^{ss} = \pi(Y_\beta{}^{ss})$$
$$S_\beta = GY_\beta{}^{ss}$$

とおく(S_β は空集合になることもある)．S_β などの k 有理点全体の集合を $S_{\beta,k}$ などと書く．

次の定理が発表論文 ① の主定理である．

定理 1．k を完全体とすると，

$$V_k-\{0\} = V^{ss}{}_k \amalg (\amalg_{\beta\in B} S_{\beta,k})$$

である．また，

$$S_{\beta,k} \cong G_k \times_{P\beta,k} Y^{ss}{}_{\beta,k}$$

が成り立つ．

なお，$G_k \times_{P\beta,k} Y^{ss}{}_{\beta,k}$ とは，$(g,v),(g'v') \in G_k \times Y^{ss}{}_{\beta,k}$ に対し $p\in P_{\beta,k}$ が存在して $g'=gp^{-1}$，$v'=pv$ となるとき同値であるとしたときの同値関係　で割った商集合

$$G_k \times Y^{ss}{}_{\beta,k}/P_{\beta,k}$$

のことである．

G が分裂しているときには，定理 1 は [3]，[4] から導くことができる(これらの論文は有理性については言及していないが)．

以下，k は完全体とする．G を k 上定義された必ずしも分裂でない簡約群，V を G の k 上の表現とする．G_1 は G の部分群で簡約であり，G の中心に含まれるトーラス T_0 があり，代数群として $G=G_1T_0$ となっているとする．

G_1 の P(V) への作用で幾何学的不変式論(GIT)における安定性を考え，V^{ss} を半安定点の集合の $\pi:V-\{0\} \to P(V)$ による引き戻しとする．$V-V^{ss}$ の点を不安定点と呼ぶが，この不安定点の集合の構造を決定するのはとても重要である．もちろん V^{ss} が興味の対象なのだが，例えばこの集合を Z_p 上で考えると，還元したときに不安定点となることはありえる．そこで不安定点の集合の構造を決定する必要が出てくるのである．なお，有限体 F_p は完全体なので，上の k に関する仮定は問題にならない．

このような状況で定理 1 と同じ主張が成り立つというのも定理 1 の系として証明した．なお，これは安定性は G_1 で考えるが，軌道は G の作用で考えるということなので，定理 1 の主張そのものではない．V には 1 次元のスカラーの方向があるので，G からもスカラーの方向を除いて安定性を考えるのが自然である．

(2) 例外ジョルダン代数の対の空間の有理軌道

k を標数が 2, 3 でない体とする. O_0 を k 上分裂した octonion とする. つまり, A=M(2) を 2 次行列の k 代数とするとき, O_0 は Cayley-Dickson の方法で得られた A(+) である. 一般に octonion とは O_0 の k-form, つまり k の分離閉包まで係数を拡張すると O_0 と同型になるもののことである. O を octonion とし, $||x||$ を $x \in O$ のノルムとする. x' を x の共役,

$$tr(x)=x+x'$$

とする.

例外ジョルダン代数 J とは, octonion O の元を成分に持つ 3 x 3 エルミート行列, つまり

$$X = \begin{matrix} s_1 & x_3 & x_2' \\ x_3' & s_2 & x_3 \\ x_2 & x_3' & s_3 \end{matrix}$$

という形をした行列全体のことである. J における積は $X,Y \in J$ なら, XY を通常の行列の積とするとき,

$$X \circ Y = (1/2)(XY+YX)$$

で定義される. O は非結合的な環だが, J 上行列式

$$\det X = s_1s_2s_3 + tr(x_1x_2x_3) - s_1||x_1|| - s_2||x_2|| - s_3||x_3||$$

は well-defined である.

代数群 E_6,GE_6 を以下のように定義する.

$$E_6 = \{L \in GL(J) \mid \det(LX)=\det(X)\},$$
$$GE_6 = \{L \in GL(J) \mid \det(LX)=c(L)\det(X)\},$$

ただし, c(L) は L にのみ依存する 0 でない定数である.

E_6 は E_6 型の単純群である. 以下,

$$H_1 = E_6,\ G_1 = GE_6,$$
$$H = H_1 \times GL(2)$$
$$G = G_1 \times GL(2),$$
$$V = J \otimes k^2$$

とする. (G,V) は既約な概均質ベクトル空間である.

$v=(v_1,v_2)$ を変数とし,

$$F_x(v) = \det(x_1 v_1 + x_2 v_2)$$

とする. これは $v=(v_1,v_2)$ の 3 次形式である. $\Delta(x)$ を F_x の判別式とすると, これは (G,V) の相対不変式である.

$$V^{ss} = \{x \in V \mid \Delta(x) \neq 0\}$$

とおく.

J の k-form M はその行列式が J における行列式と定数倍の違いしかないとき, isotope であるという. JIC(k) を J の isotope M とそれに含まれる 3 次の分離的な k 代数 n の対 (M,n) の同値類全体の集合とする.

次の定理は [2] の主定理の 1 つである.

定理 2. $V^{ss}{}_k$ における G_k 軌道全体の集合は JIC(k) と 1 対 1 に対応する.

なお, $x \in V^{ss}{}_k$ で (M,n) が対応する対なら, n は F_x により定まる 3 次の環である. また

$$w_1 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$w_2 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

$$w = w_1v_1 + w_2 v_2$$

なら $w \in V^{ss}{}_k$ であり, 次の定理も成り立つ.

定理 3. Q を O のノルムにより定まる O 上の 2 次形式とすると, G_w は GL(1) x Spin(Q) と 3 次対称群の半直積と同型である.

したがって, $x \in V^{ss}{}_k$ なら G_x の単位元の連結成分は Spin(Q) の k-form である. よって, この概均質ベクトル空間は 3 次体とその triality から定まる Spin(Q) の k-form と非常に関係しているといえる. O が分裂している場合には, 次の定理のようにもう少し正確な対応が成り立つ.

定理 4. k が有限体であるか O が分裂なら, $V^{ss}{}_k$ における G_k 軌道全体の集合はガロアコホモロジー集合 $H^1(k,S_3)$ と 1 対 1 に対応する. また, $x \in V^{ss}{}_k$ なら, 対応する $H^1(k,S_3)$ の元はガロア群の元による $F_x(v)$ の根に置換に対応する.

定理 2 の対応だが, $x \in V^{ss}{}_k$ に対し点 $m(x) \in J_k$ を対応させ, そこから isotope を構成する ([2]) ことにより得られる. J 上の環構造は $Hom_k(J \otimes J, J)$ の元(構造定数)により得られるが, このようにしてできた構造定数は x の次数 44 の多項式によりできている. この構造定数に関してはもっと小さい次数にとることもできる. これが 発表論文 ② の主結果である.

定理 5. V 上 8 次の多項式により定義された equivariant map

$$S: V \ni x \to S_x \in \mathrm{Hom}_k(J⊗J, J)$$

で (M,n) ∈ JIC(k) が $x \in V^{ss}{}_k$ に対応する対なら，M の構造定数は $\Delta(x)^{-1}S_x$ により得られる.

概均質ベクトル空間の有理軌道の解釈は古くから考えられて来た．上で考えられた概均質ベクトル空間と関係が深いのは以下の概均質ベクトル空間である.

(a) G = GL(3) x GL(2),
V=$\mathrm{Sym}^2\ k^3 ⊗ k^2$ [6],

(b) G= $\mathrm{Res}_{k\_1/k}$ GL(3) x GL(2),
V= $H_3(k_1) ⊗ k^2$ [1],

(c) $GL_3(D)$ x GL(2),
V= $H_3(D) ⊗ k^2$ [5].

ここで k_1 は k の固定された 2 次分離拡大，$\mathrm{Res}_{k\_1/k}$ GL(3) は係数体の制限，D は k 上の四元数環，$H_3(k_1)$，$H_3(D)$ はそれぞれ k_1,D 上の 3x3 エルミート行列全体の空間である．これらの概均質ベクトル空間はここで考えている概均質ベクトル空間と同じ split weight を持ち，基礎体が実数体ならそれぞれ R,C,H (Hamilton の四元数体)，O に対応する．上の概均質ベクトル空間はこれらの最後のものであり，E_8 型の単純群の放物部分より定まるもので，対称性の高い非常に興味深いものである.

[1] A.C. Kable and A. Yukie,
Prehomogeneous vector spaces and field extensions II. Invent. Math. 130:315--344, 1997.

[2] R. Kato and A. Yukie.
Rational orbits of the space of pairs of exceptional jordan algebras.
arXiv:1603.00739.

[3] F.C. Kirwan.
Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry.Mathematical Notes. Princeton University Press, 1984.

[4] L. Ness. A stratification of the null cone via the moment map. Amer. J. Math., 106:1281--1329, 1984.

[5] T. Taniguchi. On parameterizations of rational orbits of some forms of prehomogeneous vector spaces. Manuscripta Math., 125(2):169--190, 2008.

[6] D.J. Wright and A. Yukie.
Prehomogeneous vector spaces and field extensions. Invent. Math.}, 110:283--314, 1992.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

① K. Tajima and A. Yukie, Stratification of the null cone in the non-split case, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 63(1-2):262-267, 2014.
doi/10.14992/00010887

② R. Kato and A. Yukie, On equivariant maps related to the space of pairs of exceptional Jordan algebras, to appear in Comment. Math. Univ. St. Pauli.

〔学会発表〕（計　5　件）

1. A. Yukie, On orbits of prehomogeneous vector spaces, Prehomogeneous vector spaces and related topics (研究集会), 立教大学, 2014/9/5.

2. 雪江明彦, On zeta functions of prehomogeneous vetor spaces, , 金沢数論ミニ研究集会, 金沢大学, 2013/12/2.

3. A. Yukie, Prehomogeneous vetor spaces and number theory, Two-side workshop between math. dept. of Kyoto University and math. dept. of Tsingua University, Tsingua University, 2013/6/29.

4. A. Yukie, On Zp-orbits of prehomogeneous vetor spaces, 京都保型形式研究集会, 京都大学, 2012/10/5.

5. 雪江明彦, ジョルダン分解について, , 2012 年度代数学シンポジウム, 京都大学数理解析研究所, 2012/8/23.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：

権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
雪江 明彦（YUKIE, Akihiko）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 20312548

(2)研究分担者

(3)連携研究者