

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 26 日現在

機関番号：32606

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24340009

研究課題名(和文)低次元多様体モジュライ空間の新展開

研究課題名(英文)Geometry of moduli spaces for low dimensional manifolds

研究代表者

山田 澄生 (Yamada, Sumio)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：90396416

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,300,000円

研究成果の概要(和文)：19世紀までの数学においては数学的对象を特定してその性質を探求する方法論が一般的であった。一方で近代数学においては、ある特徴をもつ対象の族のもつ性質を、同時並行的に解明する方法論が重要になり、本件研究課題においては、一般相対性理論に現れるアインシュタイン計量の族および2次元多様体上に定義される双曲計量の族に焦点を当てた。その結果、相対論の文脈ではアインシュタイン・マックスウェル計量のモジュライ空間の幾何学的構造の新たな理解を得た。また双曲計量のモジュライ理論では、凸幾何学、凸解析学との関連性に注目することで新たな理論の展開を図った。

研究成果の概要(英文)：Before the 19th century, the objects of mathematical interests tended to be individual phenomenon, whether it was a curve, a function, or a shape. In contrast, in the context of modern mathematics, the importance of analyzing a FAMILY of objects concurrently was recognized, and systematically pursued. In this research project, we focused on the topic of Einstein metrics in the general relativity, and that of hyperbolic metrics defined on two dimensional manifolds. Consequently we obtained a new and complete understanding of the moduli space consisting of all the static solutions to the Einstein-Maxwell equations, and a new connection between the global aspects of the Teichmüller theory and convex geometry and convex analysis.

研究分野：幾何解析

キーワード：微分幾何学 調和写像 双曲計量 アインシュタイン計量 一般相対性理論 タイヒミュラー空間 CAT(0)空間

1. 研究開始当初の背景

ポアンカレによって提示された低次元多様体の分類プログラムおよびアインシュタインによって定式化された一般相対性理論のそれぞれに内在する2つのモジュライ空間の構造の解明することを提案した。とくに本申請研究では、タイヒミュラー空間のサー斯顿・コンパクト化、ホーキング・ペンローズによるブラックホールの存在定理、という20世紀後半の2つの大きな発展が、それぞれ葉層構造と指数写像の特異点形成という微分トポロジー的な手法によってなされたことに注目し、これらの研究の背景にあるモジュライ空間上において微分幾何学的な基盤を整備することを介して、曲面論と一般相対性理論における幾何解析学の新たな展開を図った。

2. 研究の目的

本研究課題では、これら2つのモジュライ空間の漸近的幾何構造を捉えるために、  
 A. タイヒミュラー空間のサー斯顿理論に潜在する Weil-Petersson 凸幾何学の明示、および  
 B. 3次元球面のリーマン計量の退化現象としてのアインシュタイン時空の重力崩壊の定式化という微分幾何学的な新しい切り口の導入することを目的とした。

3. 研究の方法

2次元および3次元多様体上のリーマン計量、共形構造および射影構造等の幾何構造の族について、多様体上に定義された微分方程式系を用いて理解を進める。

タイヒミュラー空間および3次元球面上の計量全体からなるモジュライ空間の漸近構造の決定を、以下で計画にしたがって遂行した。

(1) タイヒミュラー空間の漸近構造、特に共形構造の退化現象に伴う Teicuumeller 計量、Weil-Petersson 計量、Thurston リフシツツ計量の挙動の相対的関係性の定式化した。

(2) 漸近的に平坦な正スカラー曲率をもつ3次元リーマン多様体のモジュライ空間の漸近構造を、アインシュタイン方程式の厳密静的解の空間的スライスと対応させ、ブラックホールと極小曲面の発生過程の対応を決定させた。

4. 研究成果

前者(1)の課題に於いては、タイヒミュラー空間上に定義される3つの計量(タイヒミュラー計量、ペイユ・ピーターソン計量、サー斯顿計量)を用いつつ、双曲計量の助変数空間であるタイヒミュラー空間をファセットが無限個ある凸多面体として捉え、その結果、タイヒミュラー空間の無限次元のユークリッド空間内への等長埋め込みを考える

ことの必然性が理解された。特に無限次元ユークリッド空間の第1象限に定義されるFunk計量およびヒルベルト計量の重要性を新たに認識し、これらの埋め込みの比較を通してタイヒミュラー空間上に定義される上記の3つの幾何学の統合を図った。またユークリッド空間内の凸体上で定義されるFunk計量およびヒルベルト計量の一般化として、定曲率空間上でもこれらの計量に対応するものが自然に定義できることを Athanase Papadopoulos との共同研究としてまとめ、論文として発表した。また、ユークリッド空間、球面、双曲空間およびタイヒミュラー空間内の凸体上で定義される Funk 計量および Hilbert 計量の幾何学の定式化および深化を行った。とくにタイヒミュラー空間の文脈においては、双曲計量を持つ閉曲面の新たな変形理論を、境界のある双曲曲面を双曲直角6角形に分解することを介して定式化することに成功した。これは80年代にサー斯顿が曲面の双曲3角形分解を用いて行ったタイヒミュラー理論の構成を、まったく新しい観点から可能にした。また1960年代に相対性理論に誘発された H.Busemann によって定義された Timelike Geometry という距離空間の幾何学、Papadopoulos 氏と共に凸体の外的領域に定義される Funk および Hilbert 型計量として定式化することを達成した。これらの研究課題に関して、名古屋大学で大学院生を対象としたタイヒミュラー空間に関する連続講義を行い、またトルコのガラタサイ大学、およびギリシャのサモス島におけるサマースクールで主にヨーロッパと中東の大学院生を対象とした集中講義を行い、情報発信を行った。

後者(2)の課題に関しては、まず3次元多様体のリーマン計量から決まる共形構造の共形平坦性からの乖離を計る道具としてのコットン・テンソルに関する基本的な特徴付けを研究代表者が指導する大学院生、梅原慶裕と共にを行った。コットン・テンソルは計量の3階微分によって定義されるテンソルであるため計算は複雑であるが、変形が明示的に示されるハイゼンベルグ群およびベルジェー球のリッチ流において、その挙動の特徴付けを行った。コットン・テンソルの  $L^1$  ノルムは共形不変量であることが知られており、リッチ流において必然的に現れる特異点の形成に際して  $L^1$  ノルムの挙動がどのように振る舞うか具体的な計算を試みた。この視点は、リーマン幾何の爆発現象を共形幾何による正規化の観点から見たときの理解を得る上で重要である。

アインシュタイン方程式をハミルトニアン形式として認識するとき、ハミルトン汎関数として ADM 漸近普遍量と呼ばれる汎関数の族が必然的に現れる。これらの量とブラックホールの面積の間に成立する不等式は、一般にペンローズ型不等式と呼ばれる。研究代表者は Gilbert Weinstein と Marcus Khuri

両氏とともに、ADM 質量とブラックホールの表面に存在する総電荷およびブラックホールの面積の間に成立するペンローズ型不等式を、アインシュタイン・マックスウェル方程式の静的解のカテゴリーで完全に解決した。ここで完全な解決とは、不等式が等式になる剛性の状況が、基地の厳密解に対応していることを示したことを指す。この新しい結果は3次元多様体の正スカラー曲率を持つリーマン計量の変形空間の漸近的な構造と密接に関わっている。

研究分担者(山口)は、境界付きリーマン多様体の崩壊理論(内半径崩壊の場合)、曲がった空間上のフラクタル幾何、アレクサンドロフ空間のリプシッツ・ホモトピー構造、という3つの課題に関して研究を進めた。

研究分担者(大鹿)は自由群の指標多様体における Schottky 空間を初めとする変形空間の位置の研究を行った。また Klein 群の発散列を幾何的に実現する問題に取り組んだ。さらに pants 複体と Weil-Petersson 計量間の擬等長定数の種数に関する増大度を評価する問題に取り組んだ。これらの研究課題は全て2次元および3次元のリーマン多様体の変形理論の進展につながった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計14件)

#### □ 著者名/発表者名

1 Marcus Khuri, Gilbert Weinstein, Sumio Yamada, Proof of the Riemannian Penrose inequality with charge for multiple black holes, to appear (2017) in Journal of Differential Geometry 査読有.  
<https://arxiv.org/abs/1409.3271>

2 Inkang Kim, Cyril Lecuire, Ken'ichi Ohshika, Convergence of freely decomposable Kleinian groups, Inventiones mathematicae, 査読有, 2016, Volume 204, Issue 1, 83-131.  
DOI: 10.1007/s10711-015-0094-4

3 Marcus Khuri, Gilbert Weinstein, Sumio Yamada, Extensions of the charged Riemannian Penrose inequality, Classical and Quantum Gravity, 査読有, 2015, 035019.  
DOI: 10.1088/0264-9381/32/3/035019

4 Ayato Mitsuishi and Takao Yamaguchi, Collapsing three-dimensional closed Alexandrov spaces with a lower curvature bound, Trans. Amer. Math. Soc. 査読有, 2015, 367 2339-2410.  
DOI: /10.1090/S0002-9947-2014-06091-1

5 Sumio Yamada, Local and global aspects of Weil-Petersson geometry, Handbook of Teichmüller Theory, European Mathematical Society, 査読有, 2014, 巻 IV 43-112.  
DOI:10.4171/117

6 Hideki Miyachi, Ken'ichi Ohshika, and Sumio Yamada, Weil-Petersson Funk metric on Teichmüller space, Handbook of Hilbert Geometry 巻 V, European Mathematical Society, 339-352.  
DOI:10.4171/147-1/12

7 Woojin Jeon, Inkang Kim, Ken'ichi Ohshika and Cyril Lecuire, Primitive stable representations of free Kleinian groups, Israel Journal of Mathematics, 査読有, 2014, Volume 199, Issue 2, 841-866.  
DOI: 10.1007/s11856-013-0062-3

8 Ayato Mitsuishi and Takao Yamaguchi, Stability of strongly Lipschitz contractible balls in Alexandrov spaces, Mathematische Zeitschrift, 査読有, 2014, 277, 995-1009.  
DOI:10.1007/s00209-014-1289-3

9 Ayato Mitsuishi and Takao Yamaguchi, Locally Lipschitz contractibility of Alexandrov spaces and its applications, 査読有, 2014, 270 393-421.  
DOI: 10.2140/pjm.2014.270.393

10 Sumio Yamada, Convex bodies in Euclidean and Weil-Petersson geometries, Proceedings of American Mathematical Society, 査読有 2014, 142, 603-616.  
DOI:10.1090/S0002-9939-2013-11841-1

11 Sumio Yamada, Convex bodies in Euclidean and Weil-Petersson geometries, Proceedings of American Mathematical Society, 査読あり 2014, 142, 603-616.  
DOI:10.1090/S0002-9939-2013-11841-1

12 Sergio Dain, Marcus Khuri, Gilbert Weinstein and Sumio Yamada, Lower bounds for the area of black holes in terms of mass, charge, and angular momentum, Physical Review D, 査読有 2013, 88 024048  
DOI:10.1103/PhysRevD.88.024048

13 Athanase Papadopoulos and Sumio Yamada, The Funk and Hilbert geometries for spaces of constant curvature, Monatshefte für Mathematik, 査読有 2013, 172, 97-120.  
DOI: 10.1007/s00605-013-0513-2

14 Ken'ichi Ohshika, Reduced Bers

boundaries of Teichmüller spaces, Annales de l'institut Fourier, 査読有 2014, 64 145-176.  
DOI:10.5802/aif.2842

〔学会発表〕(計7件)

1 山田 澄生, アインシュタイン・マックスウェル方程式の幾何学, 第63回幾何学シンポジウム, 岡山大学, (招待講演), 2016-08-29.

2 Takao Yamaguchi, Inradius collapsed manifolds, 2016, Riemannian Geometry Seminar, MSRI USA, (招待講演), 2016-02-02.

3 Ken'ichi Ohshika, The work of Thurston on Kleinian groups. (4 talks), 2014, Master Class in Geometry: Around Thurston-Grothendieck-Teichmüller theories, IRMA Strasbourg, France, (招待講演), 2014-05-12 - 2014-05-15

4 Sumio Yamada, On Penrose-type inequalities in General Relativity, The Second Japanese-Spanish Workshop on Differential Geometry, 東京工業大学(招待講演), 2014-02-04.

5 Sumio Yamada, Convexity associated with the Weil-Petersson geometry, The XXII Rolf Nevanlinna Colloquium, Helsinki University, フィンランド(招待講演), 2013-08-07.

6 Sumio Yamada, On variational characterizations of exact solutions in general relativity, The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 札幌コンベンションセンター(招待講演), 2013-07-03.

7 山田 澄生, タイヒミューラー空間の Weil-Petersson 凸幾何学, 幾何学シンポジウム, 九州大学(招待講演) 2012-08-30.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山田 澄生 (YAMADA, Sumio)  
学習院大学・理学部・教授  
研究者番号: 90396416

### (2) 研究分担者

大鹿 健一 (OHSHIKA, Kenichi)  
大阪大学・理学研究科・教授  
研究者番号: 90396416

### (3) 研究分担者

山口 孝男 (YAMAGUCHI, Takao)  
京都大学・理学研究科・教授

研究者番号: 00182444

### (4) 研究協力者

アタナーゼ パパドプロス (PAPADOPOULOS, Athanase)  
ストラスブルグ大学・高等数学研究所・研究ディレクター