様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ４ 月 １１ 日現在

機関番号： １４５０１
研究種目： 基盤研究(B)（一般）
研究期間： 2012～2015
課題番号： ２４３４００１７

研究課題名（和文） 数論にひそむランダム性の研究

研究課題名（英文） Randomness in number theory

研究代表者
福山　克司（Fukuyama, Katusi）

神戸大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：６０２１８９５６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 5,000,000円

研究成果の概要（和文）：等比数列などの数列に関して1を法とした一様分布性を調べ、一様分布からの隔たりを与える差異量の漸近挙動を完全に記述する重複対数の法則を研究した。そこに表れる定数を多く確定することを試み、公比が負のばあについても考え、結局公比の絶対値が大きい場合に完全に定数を記述し収束スピードの確定問題をその場合に解決した。

研究成果の概要（英文）：We investigated the uniform distributedness of geometric progression and made research on the law of the iterated logarithm which discribes the deviation from the uniform distribution. We tried to determine the constant and suceeded in having the general formula of the constant in the case the absolute value of the ratio is large.
It solves the problem on the speed of convergence to the uniform distribution when the ratio is large.

研究分野： 確率論

キーワード： 確率論　一様分布　差異量

1. 研究開始当初の背景

Weyl の定理の主張は $n_{k+1} - n_k > c > 0$ であれば $\{\langle n_k x\rangle\}$ は単位区間上一様分布するというものであった。これは discrepancy

$$\sup_{0\le a'<a<1}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{1}_{[a',a)}(\langle n_k x\rangle) - (a-a')\right|;$$

で与えられる discrepancy $D_N(\{n_k x\})$ が 0 に収束することを導くものである。等差数列に関しては Khinchin と Kesten により、収束の速さは決定されていたが、等比数列に関しては研究が送れていた。

Philipp は Hadamard 間隙条件 $n_{k+1}/n_k > q > 1$ をみたす $\{n_k\}$ に対し重複対数型の評価

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} < \varlimsup_{N\to\infty}\frac{ND_N(\{n_k x\})}{\sqrt{2N\log\log N}} \le C_q \quad \text{a.e.},$$

ただし

$$C_q = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(166 + \frac{664}{q^{1/2}-1}\Big),$$

をしめして、 Erdős-Gál の予想を解決している。

研究代表者の以前の研究により等比数列の discrepancy の重複対数の法則、即ち $\theta > 1$ とすると

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{ND_N(\{\theta^k x\})}{\sqrt{2N\log\log N}} = \Sigma_\theta, \quad \text{a.e. } x.$$

が成り立つことが示されている。ここで定数 Σ_θ は $\theta^r \notin \mathbf{Q}$ $(r\in\mathbf{N})$ なら,

$$\Sigma_\theta = \frac{1}{2}$$

と与えられる。それ以外の場合は $\theta = \sqrt[r]{p/q}$ $(p,\ q \in \mathbf{N},\ r = \min\{k\in\mathbf{N} \mid \theta^k \in \mathbf{Q}\}$, $\gcd(p,q) = 1)$ と書き表したとすると p、 q がともに奇数なら

$$\Sigma_\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{pq+1}{pq-1}},$$

特に p が奇数で $q=1$ の時は

$$\Sigma_\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p+1}{p-1}}.$$

また $p \ge 4$ が偶数で $q=1$ の時には

$$\Sigma_\theta = \frac{\sqrt{(p+1)!/(p-3)!}}{2(p-1)^2},$$

$p=2,\ q=1$ なら

$$\Sigma_\theta = \frac{\sqrt{42}}{9},$$

$p=5,\ q=2$ なら

$$\Sigma_\theta = \frac{\sqrt{22}}{9}.$$

それ以外の場合に値を求め、収束の速さを完全に決定することはできていなかった。

2. 研究の目的

間隙級数の方法を用いて典型的な数列に対して discrepancy の漸近挙動を完全に決定することである。

3. 研究の方法

discrepancy を単位区間内の有限個の点を端点にもつ有限個の区間に限定した最大値により得られる量とそこで用いられた点の間に限定し取った上限の二つの量に分解して評価する discrepancy splitting の手法を徹底的に応用し評価して行く。

また、martingale 近似による概不変定理の導出により、重複対数の型の定理を導く。

4. 研究成果

(1) Hadamard 間隙列に関する discrepancy の有界型重複対数の法則の精密化

Philipp の与えた有界型重複対数の法則に於ける上からと下からの定数を大幅に改善し

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \le \varlimsup_{N\to\infty}\frac{ND_N(\{n_k x\})}{\sqrt{2N\log\log N}} \le \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4}{\sqrt{3}(q-1)}} \quad \text{a.e.}$$

の形とした。

また、ある種の Diophantine 条件を仮定すると、最良評価

$$\frac{1}{2} \le \varlimsup_{N\to\infty}\frac{ND_N(\{n_k x\})}{\sqrt{2N\log\log N}} \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q+1}{q-1}} \quad \text{a.e.}$$

が導けることを示した。

(2) 等比数列の discrepancy の重複対数の法則に現われる定数の決定

θ が負の場合も含めて研究した。$|\theta| > 1$ をみたす実数 θ に関して以下の重複対数の法則を示した。

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{ND_N\{\theta^k x\}}{\sqrt{2N\log\log N}} = \Sigma_\theta, \quad \text{a.e.}$$

θ が有理巾根でない場合即ち $\theta^j \notin \mathbf{Q}$ ($j = 1, 2, \ldots$) なら $\Sigma_\theta = \frac{1}{2}$ であり、有理巾根であれば $\Sigma_\theta > \frac{1}{2}$ である。
以下 θ は有理巾根とし $r = \min\{j \in \mathbf{N} \mid \theta^j \in \mathbf{Q}\}$ と r を定め $\theta^r = p/q$ の様に $p \in \mathbf{Z}$ と $q \in \mathbf{N}$ を用いて既約分数に表すとする。
p, q がともに奇数であれば

$$\Sigma_\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|p|q+1}{|p|q-1}}$$

である。 $q = 1$ であり、p が偶数である場合 $|p| \geq 4$, $p = 2$, $p = -2$ であるにしたがって Σ_θ は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(|p|+1)|p|(|p|-2)}{(|p|-1)^3}}, \quad \frac{1}{9}\sqrt{42}, \quad \frac{1}{49}\sqrt{910}$$

に等しい。また $p/q = \pm 5/2$ のときは

$$\Sigma_\theta = \frac{1}{9}\sqrt{22}$$

である。
また、p/q の値が大きい時には Σ_θ の具体的値を与える公式が求まった。
p が奇数 q が偶数で $|p/q| \geq 9/4$ である場合と、p が偶数 q が奇数で $|p/q| \geq 4$ である場合には Σ_θ は以下の様に与えられる。

$$\sqrt{\begin{aligned}&\frac{(|p|q)^I+1}{(|p|q)^I-1} v\Big(\frac{|p|-q-1}{2(|p|-q)}\Big) + \frac{2(|p|q)^I}{(|p|q)^I-1}\\ &\qquad \times \sum_{m=1}^{I-1} \frac{1}{(|p|q)^m} v\Big(q^m \frac{|p|-q-1}{2(|p|-q)}\Big)\end{aligned}}.$$

ここで $v(x) = \langle x\rangle(1-\langle x\rangle)$, $I = \min\{n \in \mathbf{N} \mid q^n = \pm 1 \bmod |p|-q\}$ である。
この公式により、例えば以下の値を求めることができる

$$\Sigma_{\pm 7/2} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{1294}{195}},\ \Sigma_{\pm 9/2} = \frac{2}{49}\sqrt{\frac{18561}{119}},$$
$$\Sigma_{\pm 11/2} = \frac{2}{117}\sqrt{\frac{2635}{3}},$$
$$\Sigma_{\pm 13/2} = \frac{1}{55}\sqrt{\frac{73250534}{95051}},$$
$$\Sigma_{\pm 15/2} = \frac{1}{91}\sqrt{\frac{31238857842}{14877551}},$$
$$\Sigma_{\pm 14/3} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{4096559910}{130691231}},$$
$$\Sigma_{\pm 9/4} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{222}{35}}, \ldots$$

(3) 複素公比の等比数列の discrepancy の重複対数の法則
$|\theta| > 1$ をみたす複素数 θ に関して以下の重複対数の法則を示した。

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{ND_N\{\theta^k z\}}{\sqrt{2N\log\log N}} = \Sigma_\theta, \quad \text{a.e. } z$$

ここで discrepancy の定義は複素数列の discrepancy として自然に拡張してある。特に θ が Gauss 有理巾根でない場合即ち $\theta^j \notin \mathbf{Q}[\sqrt{-1}]$ ($j = 1, 2, \ldots$) なら $\Sigma_\theta = \frac{1}{2}$ である。

5. 主な発表論文等
[雑誌論文] (計 20 件)

① K. Fukuyama & Y. Noda, *On permutational invariance of the metric discrepancy results*, Mathematica Slovaca, (to appear)

② K. Fukuyama & M. Yamashita, *Metric discrepancy results for geometric progressions with large ratios*, Monatshefte für Mathematik, (to appear)
DOI:10.1007/s00605-015-0791-y

③ C. Aistleitner & K. Fukuyama, *On the law of the iterated logarithm for trigonometric series with bounded gaps II*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **28** (2016) (in press)

④ C. Aistleitner & K. Fukuyama, *Extremal discrepancy behaviour of lacunary sequences*, Monatshefte für Mathematik, **177** (2015) 167–184,
DOI:10.1007/s00605-014-0693-4

⑤ K. Fukuyama & N. Kuri, *The central limit theorem for complex Riesz-Raikov sums*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I, **351** (2015) 749–753,
`DOI:10.1016/j.crma.2015.04.020`

⑥ K. Fukuyama, *A metric discrepancy result for the sequence of powers of minus two*, Indagationes Mathematicae, **25** (2014) 487–504,
`DOI:10.1016/j.indag.2013.12.002`

⑦ H. Nakada & R. Natusi, *On the equivalence of α-continued fraction*, Indagationes Mathematicae, **25** (2014) 800–815, 査読あり、
`DOI: 10.1016/j.indag.2014.02.006`

⑧ V. Berthé, H. Nakada, R. Natusi & B. Vallee, *Fine costs for Euclid's algorithm on polynomials and Farey maps*, Advances in Applied Mathematics **54** (2014) 27-65. 査読あり、
`DOI:10.1016/j.aam.2013.11.001`

⑨ D. H. Kim, S. Lee, H. Nakada & R. Natusi, *Farey maps, Diophantine approximation and Bruhat-Tits tree*, Finite fields and their applications **30** (2014) 14-32. 査読あり,
`DOI: 10.1016/j.faa.2014.05.007`

⑩ N. Kajino, *Log-periodic asymptotic expansion of the spectral partition function for self-similar sets*, Communications in Mathematical Physics, **328** (2014) 1341–1370,
`DOI: 10.1007/s00220-014-1922-3`

⑪ C. Aistleitner, K. Fukuyama & Y. Furuya, *Optimal bound for the discrepancies of lacunary sequences*,
Acta Arithmetica, **158** (2013) 229–243,
`DOI:10.4064/aa158-3-3`

⑫ K. Fukuyama, *Metric discrepancy results for alternating geometric progressions*, Monatshefte für Mathematik, **171** (2013) 33–63,
`DOI:10.1007/s00605-012-0419-4`

⑬ D.H. Kim & H. Nakada, R. Natsui, *A refined Kurzweil type theorem in positive characteristic Finite fields and their applications*, **20** (2013) 64-75. 査読あり, DOI: 10.1016/j.faa.2012.12.002

⑭ N. Kajino, *On diagonal oscillation of the heat kernels on post-critically finite self-similar fractals*, Probability Theory and Related Fields, **156** (2013) 51–74,
`DOI: 10.1007/s00440-012-0420-9`

⑮ N. Kajino, *Analysis and geometry of the measurable Riemannian structure on the Sierpiński gasket*, Contemporary Mathematics, **600** (2013) 91–133,
`DOI: 10.1090/conm/600/11932`

⑯ N. Kajino, *Non-regularly varying and non-periodic oscillation of the on-diagonal heat kernels on self-similar sets*, Contemporary Mathematics, **601** (2013) 165–194,
`DOI: 10.1090/conm/601/11935`

⑰ K. Fukuyama, *Metric discrepancy results for geometric progressions and variations*, Summer School on the Theory of Uniform Distribution, Ed. S. Akiyama, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B29** (2012) 41–64,
`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B29/pdf/B29-02.pdf`

⑱ K. Fukuyama & Y. Mitsuhata, *Bounded law of the iterated logarithm for discrepancies of permutations of lacunary sequences*, Summer School on the Theory of Uniform Distribution, Ed. S. Akiyama, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B29** (2012) 65–88,
`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B29/pdf/B29-03.pdf`

⑲ K. Fukuyama, K. Murakami, R. Ohno & S. Ushijima, *The law of the iterated logarithm for discrepancies of three variations of geometric progressions*, Summer School on the Theory of Uniform Distribution, Ed. S. Akiyama, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B29** (2012) 89–118, `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B29/pdf/B29-04.pdf`

⑳ C. Aistleitner & K. Fukuyama, *On the law of the iterated logarithm for trigonometric series with bounded gaps*, Probability Theory and Related Fields, **154** (2012) 607–620, `DOI:10.1007/s00440-011-0878-z`

[学会発表] (計 11 件)

① 福山克司, 宮本 翔, Metric discrepancy results for Erdős-Fortet sequence, 日本数学会秋期総合分科会統計数学分科会, 2012.9.18, 九州大学 (福岡県)

② 福山克司, 等比数列の一様分布論, 京都大学大学院理学研究科数学教室談話会, 2013.2.20, 京都大学 (京都府)

③ C.Aistleitner, 福山克司, 降矢祐加子, Optimal bound for the discrepancies of lacunary sequences, 日本数学会年会統計数学分科会, 2013.3.20, 京都大学 (京都府)

④ 福山克司, 等比数列の一様分布論, 日本数学会秋季総合分科会統計数学分科会特別講演, 2013.9.24, 愛媛大学 (愛媛県)

⑤ 福山克司, 簑原 貴文, The central limit theorem for subsequences of Erdős-Fortet sequence, 日本数学会年会統計数学分科会, 2013.3.15, 学習院大学 (東京都)

⑥ 福山克司, C. Aistleitner, 有界間隙列の重複対数の法則について II, 日本数学会秋季総合分科会統計数学分科会, 2014.9.25, 広島大学 (広島県)

⑦ 福山 克司, Non Conventional Limit Theorems: Kifer, Varadhan の論文紹介, ワークショップ確率論早春セミナー, 2015.3.8, 立命館大学 (滋賀県)

⑧ 福山 克司, 野田 裕太郎, On permutational invariance of the metric discrepancy results, 日本数学会年会統計数学分科会, 2015.3.21, 明治大学 (東京都)

⑨ 福山 克司, 久利 典之, Metric discrepancy results for complex geometric progressions, 日本数学会秋季総合分科会統計数学分科会, 2015.9.13, 京都産業大学 (京都府)

⑩ 福山 克司, 等比数列の一様分布論, 東北確率論セミナー, 2016.1.29, 東北大学 (宮城県)

⑪ 福山 克司, 山下 麻衣, Metric discrepancy results for geometric progressions with large ratios, 日本数学会年会統計数学分科会, 2016.3.17, 筑波大学 (茨城県)

[図書] (計 1 件)

① 杉田 洋, 数学書房, 確率と乱数, 2014, pp140

6. 研究組織

(1) 研究代表者

福山 克司 (FUKUYAMA KATUSI)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60218956

(2) 研究分担者

仲田 均 (NAKADA HITOSHI)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号: 40118980

杉田 洋 (SUGITA HIROSHI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 50192125

梶野 直孝 (KAJINO NAOTAKA)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 9070352

(3) 連携研究者 無し