

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 17 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24340019

研究課題名(和文) 高次元局在パターンの運動を解析するための理論の構築

研究課題名(英文) Theory for the analysis on the motion of localized patterns in higher dimensional spaces

研究代表者

栄 伸一郎 (EI, Shin-Ichiro)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：30201362

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,800,000円

研究成果の概要(和文)：当研究課題では、反応拡散系における局在パターンの運動を、特に相互作用の観点から理論的に解析するための数学的手法の開発を目指し、結果として曲面の幾何的特性と局在パターンの運動との関連を明らかにし、安定な空間配位を決定するための条件式を得た。また非球対称局在パターンの相互作用に関する一般論を構築し、水面上の2つの非球対称樟脳片の位置関係の解析に応用するとともに、実験による検証も行った。更に、進行速度の異なる局在パターンを相互作用により安定な対を構成するとともに、その結果が心筋細胞に現れる脈動パルスの解析に利用できることを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In this project, we aimed to develop mathematical technique to analyze the interacting motion of localized patterns and succeeded to get results for the motions for a curved surface, asymmetric localized patterns and traveling localized ones. Clearly speaking, we first clarified the relation between geometrical properties of a surface and motions of interacting patterns. We also derived the equation explicitly to determine a stable spatial distribution of patterns. Secondly, we established a general theory to deal with asymmetric patterns and applied it to the analysis of interacting motion of two camphor discs on water surface. We also checked the theoretical prediction in a real experiment. Finally, we mention to succeed to construct stable pairs of traveling patterns by using the interaction between fast and slow traveling ones. The result is shown to be applicable to the analysis of breathing traveling motions appearing in heart muscles.

研究分野：非線形解析

キーワード：反応拡散系 局在解 相互作用

1. 研究開始当初の背景

パターンを構成する基本要素として、スポット状局在パターンや界面状局在パターンをあげることができる。様々な空間パターンはこうした基本的パターンの組み合わせで表現されることから、基本パターンそのものの構成やそれらの間の相互作用がパターン形成のメカニズムを知る上で大変重要になってくるが、特殊な場合を除いてはほとんど解析が行われていなかった。そうした背景から本研究課題では基本的パターンの間の相互作用を解析するための汎用性の高い理論を構築し、いくつかの重要な問題に実際に応用することを目的として研究を開始することとした。

2. 研究の目的

本研究課題ではパターン形成のメカニズムを知るために反応拡散型のモデル方程式に着目し、基本的パターンである、空間的に局在した解の様々な挙動を調べるための理論の構築を目指した。具体的には界面やスポット状局在解を考察の対象とし、それらが多数存在する場合の局在解同士の相互作用を解析するための理論を構築することを主目的とし、併せて不均一場や曲面上におけるスポットの挙動など、色々な状況下で局在解の運動を抽出し解析するための総括的な理論の構築および解構造の解明を目的として本研究課題を進めた。

3. 研究の方法

汎用性のある理論にするために、モデル方程式は反応拡散型であるという条件以外ではできるだけ課さず、一般の反応拡散系で成立する理論の構築を目指した。一方で対象をスポット状局在パターンと界面状局在パターンに絞ること、および主に2次元空間で考察する、といったことにより、一般論でありながら、ある程度具体的に運動を抜き出すことができることを目指した。一般論の構築の際には方程式の一般性を保つため、基本となる単独のスポット状局在パターンや界面状局在パターンの存在及び安定性を仮定し、必要に応じてそれらと両立する条件、例えば非線形項の双安定性や単調性などを仮定として加えていくといった方法をとった。一方で、一般論構築の際に課された仮定が多くの重要な例で満たされていることを示すことも重要であると考え、モデル方程式毎に個別に仮定をチェックした。このように一般論の構築とモデル方程式毎の個別の解析を切り離し、独立に研究を進めるといった方法をとった。その結果、一般論の解析が先行し、それに対応する個別のモデルが未だ見つからないため研究業績としてまとめるに至らないという事例が生じたことは予想外であった。しかし、多くの事例で先行研究の結果が適用可能であったり、共同研究者の協力を得たりすることなどで、モデル方程式毎の解析に関しても

ある程度行うことができた。

4. 研究成果

(1) 定常スポット状局在パターンの運動と相互作用:

直線上または平面上における、安定な一つのスポット状局在定常パターンの存在、及びそれに付随した基底状態の安定性を仮定することにより、不均一場及び曲面上におけるスポットパターンの運動を解析することができた。具体的な成果として、まず不均一場においては、1次元活性化-抑制化因子系を考え、不均一性をすべての式に導入した場合、パルス解(1次元空間におけるスポット解を指す)の運動はある一つの関数の勾配系として記述できることが示された。これは複数の不均一性が一つの勾配関数の情報として集約されることを意味し、不均一性の与える効果の本質を理解する上で役立つと期待された。特に生物学的な意味を考察する場合に有効であった。この勾配関数の形状を調べることで、パルスの収束先を知ることができるが、例えば勾配関数のピークが一つになるように不均一性をコントロールすることにより、そのピークの位置にパルスを収束させることができる。本研究では更にこれを発展させて、複数のパルスの運動を相互作用と不均一性の相互影響の観点から調べた。その結果、勾配関数が唯一つのピークを持つように不均一性を導入しておく、別に示された複数のパルスの反発的相互作用の性質と組み合わせることにより、ピーク位置の近傍に複数のパルスが存在するような安定定常状態を構成することに成功した。このような解はこれまで知られていなかった形状の解である。このように、ある一つの勾配関数の形状を見るだけで複数のパルスの運動を直感的にとらえることのできる理論を構築できたといえる。

同様の問題は曲面上のスポット状局在パターンの運動においても考えることができる。曲面上の反応拡散方程式を考えると、曲面を等温座標系等により表現すると、ラプラスアン係数が空間変数に依存する形に帰着することができることから、ある種の2次元不均一場上の問題ととらえることもできる。当研究では最終的に、単一のスポットの運動は曲面のガウス曲率の勾配系として記述されることを示すことができた。そこでガウス曲率がただ一つのピークを持つような曲面を考え、単一のスポットがそのピーク位置に収束する状況にしておいた上で複数のスポットを考えると、そのピーク位置の近傍にスポットが集中した状態の安定定常パターンを構成することができた。このように、スポットの取り得る安定な空間配位をガウス曲率の等高線から直感的にとらえることができる理論とすることができた。

上記の問題はいずれもスポット解が基本的に球対称な場合であり、スポットの運動は

その中心位置に関する常微分方程式で記述された。一方で、非球対称なスポットの場合は回転も考察する必要があり興味深い運動が出現する。当研究では、非球対称なスポットとして、水面に浮かべた樟脳片の運動を扱った。樟脳片はその形状を人工的に任意形状に加工することができるため、理論と実験の詳細な比較検証が可能である。実際当研究では、 $\cos mx$ の形の変形を与え、複数の樟脳片が回転も含めどのように相互作用するかを理論的に解析することに成功した。結果として、例えば2つの樟脳片の場合であれば、その中心線に関して普遍的に直交することなどを理論的に示すと同時に、その理論的帰結を3Dプリンター等を用いて構成した樟脳片を用いて実験的にも詳細に検証した。

(2) 動的な局在パターンの運動と相互作用:

単独の局在パターン自身が運動する、いわゆる自己駆動型局在解に関しては、その解析が困難である場合が多いが、当研究課題ではいくつかの結果を得た。まず1次元においては、速度の異なる2つの局在フロントパターンを相互作用により組み合わせることにより、安定な進行パルス解を構成できることを示した。この解を不均一場上で考えることにより、尺取り虫状に伸び縮みしながら運動する進行局在パターンを構成した。また、心筋細胞で観察される進行パルスは、単独では安定でありながら、複数存在すると振動的相互作用をすることが知られていたが、理論的説明がこれまでなされていなかった。これに対して、速度と安定性の異なるフロント状局在パターンを組み合わせることにより、この現象を理論的に示すことに初めて成功した。

一方、球面上の動的スポット状局在パターンは次第に大円に沿った運動になることが多くの事例で観察されているが、当研究において、曲面上の反応拡散方程式系が有する進行スポットの運動を記述する運動方程式を一般的に抜き出すことに部分的に成功した。これにより、進行スポット解が次第に大円に収束していく事実に対して理論的根拠を与えることができた。

(3) スポット状局在パターンと界面や境界との相互作用:

スポット解と界面の相互作用はこれまで数値計算以外に理論的考察はほとんどなかった。当研究では界面をほぼ直線としたときにその運動を記述する方程式の形式的導出に成功したが数学的に厳密な証明には至らなかった。また定常安定スポット解と定常安定プラナー解(まっすぐな界面)の同時存在を仮定したが、そのような例自体がほとんど知られておらず、理論を検証するための数値計算も困難であった。そこでこれらの問題に対する本格的考察は次期研究計画に委ね

ることとし、当研究では固定された界面、すなわち境界との相互作用を中心に考察した。これまで境界条件がノイマン型で、かつ境界が直線の場合に限り、境界に関して鏡像関係にあるスポットとの相互作用として解析が可能であったが、一般に曲がった境界の場合には取り扱うための理論的方法がなかった。当研究では境界に関する鏡像スポットの一般化を行うことにより、境界との相互作用を記述する運動方程式を、領域におけるある種のディクレ-ノイマン写像を求める問題に帰着した。またそれを用いて、ほぼ直線に近い境界の場合に具体的な運動を抽出することができた。実際、その運動は境界の直線からのずれに対応する関数の勾配系として近似され、例えば境界のくぼみ付近に安定定常状態を構成することができるなどの結果を得た。

以上報告した結果はすべて現在投稿中または執筆中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計11件)

Shin-Ichiro Ei, Kei Nishi, Yasumasa Nishiura and Takashi Teramoto, ANNIHILATION OF TWO INTERFACES IN A HYBRID SYSTEM, DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS SERIES S, 査読有 Volume 8, Number 5, October 2015, 857-869. DOI:10.3934/dcdss.2015.8.857

S.-I. Ei, K. Ikeda, M. Nagayama and A. Tomoeda, REDUCED MODEL FROM A REACTION-DIFFUSION SYSTEM OF COLLECTIVE MOTION OF CAMPHOR BOATS, DISCRETE AND CONTINUOUS, 査読有 Volume 8, Number 5, October 2015, 847-856. DOI: 10.3934/dcdss.2015.8.847

Yanagida, Eiji; Ikeda, Kota; Ei, Shin-Ichiro Instability of multi-spot patterns in shadow systems of reaction-diffusion equations, Commun. Pure Appl. Anal. 査読有 14 (2015), no.2, 717-736. DOI: 10.3934/cpaa.2015.14

S.-I. Ei, K. Ikeda, M. Nagayama and A. Tomoeda, APPLICATION OF A CENTER MANIFOLD THEORY TO A REACTION-DIFFUSION SYSTEM OF COLLECTIVE MOTION OF CAMPHOR DISKS AND BOATS, MATHEMATICA BOHEMICA, 査読有 139, No.2 (2014), 363-371.

S.-I. Ei and T. Ishimoto,
Effect of boundary conditions on the
dynamics of a pulse solution for
reaction-diffusion systems,
NETWORKS AND HETEROGENEOUS MEDIA, 査読
有
Volume 8, Number 1, March (2013), pp.
191- 209.
DOI: 10.1007/s13160-012-0088-7

S.-I. Ei and T. Ishimoto,
Dynamics and their interaction of spikes
on smoothly curved boundaries for
reaction-diffusion systems in 2D,
Japan. J. Ind. Appl. Math. 査読有
30(2013), no. 1, 69 - 90.
DOI: 10.1007/s13160-012-0088-7

Wulin Weng, Shin-Ichiro Ei and
Kunishige Ohgane,
The functional roles of time delay on
excitable phase-locking in Bipedal
locomotion,
Journal of Math-for-Industry, 査読有
Vol. 4 (2012B-7), pp. 123-133.

S.-I. Ei, H. Izuhara and M. Mimura,
Infinite dimensional relaxation
oscillation in reaction-diffusion
systems,
RIMS Kokyuroku Bessatsu 査読有
B35 (2012), 31-40.

S.-I. Ei, H. Izuhara and M. Mimura,
Infinite dimensional relaxation
oscillation in aggregation-growth
systems,
Discrete and Continuous Dynamical
Systems, 査読有
Series B, 17 (2012) 1859 - 1887.

S.-I. Ei,
Dynamics of pulses on a thin strip-like
domain in \mathbb{R}^2 ,
RIMS Kokyuroku Bessatsu 査読有
B31 (2012) 195-210.

Shin-Ichiro Ei, Kota Ikeda and Yasuhito
Miyamoto,
Dynamics of a boundary spike for the
shadow Gierer-Meinhardt system,
Commun. Pure Appl. Anal. 査読有
11 (2012), no. 1, 115-145.

[学会発表](計 44 件)

栄 伸一郎
Effect of boundaries on the motion of a
spot solution in a two dimensional
domain, Reaction-Diffusion Systems in

Mathematics and Biomedecine, 2016/9/22,
Villa Clythia, フランス

栄 伸一郎
Pulse interaction in modified
FitzHugh-Nagumo equations, Mathematics
of Pattern Formation, 2016/9/15,
Mathematical Research and Conference
Center, ベルギー

栄 伸一郎
Effect of boundaries on the motion of a
spot solution in a two dimensional
domain, Joint Australia-Japan workshop
on dynamical systems with applications
in life sciences,
2016/7/21, Queensland University of
Technology, オーストラリア

栄 伸一郎
Pulse dynamics of modified
FitzHugh-Nagumo equation, 2015 NCTS
Workshop on Partial Differential
Equations and Applied Mathematics,
2015/12/29, NCTS, Tsing-Hua University,
新竹市(台湾)

栄 伸一郎
「不安定化がパターンを生む」, 新しい世紀の
形態計量学 - 数学と鉄鋼研究のコラボレーション -
第 67 回白石記念講座, 2015/11/13, 早稲
田大学西早稲田キャンパス(東京都, 新宿区)

栄 伸一郎
Pulse dynamics of modified
FitzHugh-Nagumo equation, 2015 CMC-KMRS
Mathematical Biology Conference on
Cross-diffusion, chemotaxis, and
related problems, 2015/7/9, KAIST (Korea
Advanced Institute of Science and
Technology), デュッセルドルフ(韓国)

栄 伸一郎
Weak interaction of wavefronts in
FitzHugh-Nagumo systems,
研究集会「パターン生成とダイナミクスの解構造の
探求」, 2015/6/27, 北海道大学 学術交流
会館, (北海道, 札幌市)

栄 伸一郎
Motion of interacting camphors, 第 2 回
拡散に付随する数理科学セミナー, 2015/1/10,
九州大学・産学官連携本部産学官連携イノ
ベーションプラザ (福岡県, 福岡市)

栄 伸一郎
Motion of interacting camphors,
2014 NCTS Applied Math. & PDE Seminar,
2014/12/2, National Tsing Hua
University, 新竹市(台湾)

栄 伸一郎

Motion of patterns on a curved surface-
曲面上におけるパターンの運動, 日本植物学
会第 78 回大会, 2014/9/13, 明治大学生田
キャンパス(神奈川県、川崎市)

栄 伸一郎

化学反応系に現れるスパイラル波への数学的ア
プローチについて, 2014 渦の特徴付け研究集
会, 2014/7/30, 北海道大学理学部(北海道,
札幌市)

栄 伸一郎

Pulse dynamics in
FitzHugh-Nagumo systems on
heterogeneous media, Special Session 08
Emergence and Dynamics of Patterns in
Nonlinear Partial Differential
Equations from Mathematical Science,
The 10th AIMS Conference on Dynamical
Systems, Differential Equations and
Applications, 2014/7/9, The Universidad
Autónoma de Madrid, マドリード(スペイン)

栄 伸一郎

2次元領域におけるスポット解の運動につい
て, 日本応用数学会 2013 年度年会,
2013/9/10, アクア福岡 4F 国際会議場, (福
岡県, 福岡市)

栄 伸一郎

Dynamics of Localized patterns for
Reaction-Diffusion Systems on a Curved
Surface, Workshop on Mathematical
Modelling and Analysis in the Life
Sciences, 2013/6/12, Carry-le-Rouet,
プロヴァンス(フランス)

栄 伸一郎

Dynamics of Localized Solutions for
Reaction-diffusion Systems on Curved
Surface, IMA Special Workshop Joint
US-Japan Conference for Young
Researchers on Interactions among
Localized Patterns in Dissipative
Systems, 2013/6/7, IMA Keller Hall,
ミネアポリス(アメリカ)

栄 伸一郎

2次元領域における進行スポットパターンの運動
について, ミニシポジウム「植物の遺伝子発現
の移動波パターンの実験と数理」2012/11/13,
理化学研究所(埼玉県, 和光市)

栄 伸一郎

Dynamics of localized solutions for
reaction-diffusion systems on two
dimensional domain, Nonlinear Partial
Differential Equations, Dynamical

Systems and Their Applications,
2012/9/4, 京都大学数理解析研究所(京都
府, 京都市)

栄 伸一郎

Dynamics of localized solutions for
reaction-diffusion systems in
two-dimensional domains, 研究集会
Turing Symposium on
Morphogenesis--Mathematical Approaches
Sixty Years after Alan Turing--,
2012/8/27, 仙台国際センター(宮城県, 仙台市)

[図書](計1件)

西井 龍映, 栄 伸一郎, 岡田 勘三,
落合 啓之, 小磯 深幸, 斎藤 新悟,
白井 朋之,
九州大学マシフォアインダストリ研究所
科学・技術の研究課題への数学アプローチ:
数学モデリングの基礎と展開: 九州大学グロ
バル COE プログラム, 2013, 326P

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~Eichiro/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

栄 伸一郎 (Ei Shin-Ichiro)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号: 30201362