

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 26 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24340020

研究課題名(和文) 数論的アルゴリズムの研究を通じたエルゴード理論の新たな展開

研究課題名(英文) Recent progress in ergodic theory of number theoretic algorithms

研究代表者

仲田 均 (Nakada, Hitoshi)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：40118980

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,300,000円

研究成果の概要(和文)：エルゴード理論の研究はその初期から現在に至るまで数論の研究と密接な関わり合いを持ってきた。とりわけ、実数の2進あるいは10進展開や連分数展開の研究は依然として多くの未解決な問題があり、また一方で情報科学における暗号理論、通信理論などからの要請による新しい研究課題も多く存在する。本研究では連分数展開などの収束、近似の問題あるいはユークリッドアルゴリズムの計算コストの評価を確率論的に取扱い、新たな知見を得ることができた。また、一様分布論など関連する周辺分野についてもいくつかの新しい結果を得た。

研究成果の概要(英文)：The research on ergodic theory has had a strong relation to the theory of numbers even from the beginning until now. In particular, there are a number of open questions in the theory of binary, decimal, and continued fraction expansions. On the other hand, there are also new open questions concerning the theory of cryptography and the communication theory. In the present research, we mainly study the approximation theory of continued fractions with its speed of the convergence and also study the probabilistic estimate of the calculation costs of the Euclidean algorithms. We have some new results concerning these problems as well as other related subjects as the theory of uniform distributions.

研究分野：数理科学

キーワード：エルゴード理論 連分数 ユークリッドアルゴリズム 一様分布論

### 1. 研究開始当初の背景

研究代表者はエルゴード理論の方法を用いて数論的なアルゴリズムの測度論的研究を行ってきた。とりわけ、連分数変換とその自然拡大に関する研究において多くの成果を挙げている。一方で、近年海外において確率論・力学系・数論・幾何学を横断的に纏め上げる理論が大きく発展した。中でも次の三つの分野が本研究に密接に関連している。

(1) T. Tao, V. Bergelson などによる組合せ的数論とエルゴード理論の関係の研究

(2) E. Lindenstrauss, M. Einsiedler 達による等質空間上の力学系上のエルゴード理論とそのディオファントス近似論への応用

(3) A. Avila, M. Mirzakhani 達によるタイヒミュラー空間上のエルゴード理論とその応用

これまでの代表者を中心とした研究者の測度論的数論の研究が、これらの分野と横断的に密接な関わり合いを持つことが予想されるようになった。

### 2. 研究の目的

上に述べた三つの分野の問題とこれまでの代表者を中心とする研究グループにより行われてきた研究との関わり合いを一層具体的に明らかにする。また、それにより力学系のエルゴード理論、数論、幾何学、確率論を統合的に扱う新たな理論的手法を開発し、エルゴード理論と数論、およびその計算機科学への応用に新しい展望を開く。さらに、低次元写像の作る力学系や幾何学的空間上の作用から派生する力学系の研究を通して無限大不変測度を持つ力学系のエルゴード理論とその数論への応用の可能性を明らかにする。

また、この過程でこれらの分野に関連する研究を行っている多くの海外の研究者との共同研究を行うことにより、国際的連携ネットワークを構築し我が国の数理学とりわけエルゴード理論研究の国際的な立場を強化する。

### 3. 研究の方法

本研究の目的の一つである国際連携の確立のため、国際研究集会を研究代表者、分担者（および海外の研究者との連携）により開催し積極的な情報交換を行う。実連分数変換のエルゴード理論、複素数のディオファントス近似論とエルゴード理論、一様分布論、非アルキメデス数体上のエルゴード理論など研究テーマごとに小グループによる研究討論、セミナーなどを行いながら研究を行う。隣接する研究分野からの知見を得るために研究集会にも可能な限り参加する。国内また、それぞれの研究課題に応じて海外の研究者と連絡を保ちつつ国際共同研究を進める。そのため、国外の共同研究者を招聘し、あるいは研究代表者、分担者が国外出張し、研究討論を行う。

### 4. 研究成果

#### (1) 国際連携ネットワークの確立

この目的のために国内外で多数の国際研究集会・ワークショップを開催した。研究代表者、分担者が組織委員として開催した主なものは下記のとおりである。

Ergodic Theory and Metric Number Theory, 日本女子大学, 2012年12月: J. Aaronson(Tel Aviv大), V. Berthe(Paris第7大), D. H. Kim(Dongguk大)など共同研究を行っている研究者の他、V. Bergelson(Ohio State大), C. Kraaikamp(Delft工科大), O. Sarig(Weizmann研究所), T. Schimdt(Oregon大)他多くの国外からの研究者を招聘し関連分野の研究情報の交換を行った。

Measurable and Topological Dynamical Systems-Keio 2013, 慶應義塾大学日吉キャンパス, 2013年12月: K.K. Park(韓国, KIAS), X.D. Ye(中国, 中国科学技術大学)との連携により日・中・韓の関連諸分野の研究者間の情報交換を行うことを目的とし両国から併せて20名強の研究者を招聘し、またヨーロッパ・アメリカからも数名の研究者を招聘した。これにより関連諸分野の多くの研究情報を得ると共に今後の研究交流の強化がなされた。

Warwick-Keio Seminar in Ergodic Theory, Warwick大学(UK), 2014年1月: R. Sharp(Warwick大)との連携により開催した。本研究の共同研究者のJon Aaronson(Tel Aviv大)も加わり多くの英国の研究者との研究情報交換を行った。

Measurable and Topological Dynamical Systems, NIMS(韓国), 2015年6,7月: を引き継ぎ、研究集会を開催し、前回以上に活発な研究情報交換を行った。

Seminar in Ergodic Theory-Keio 2016, 慶應義塾大学日吉キャンパス, 2016年1月: これまでの研究成果の報告と今後の展望に関する研究討論を目的として開催した。共同研究者のV. Berthe(Paris第7大), Dong Han Kim(Dongguk大)の他にM. Keane(Delft工科大)他も加わり研究成果報告を行うと共に今後の研究の方向性についても多くの討論を行った。

これらの国際研究集会を通して当初の目的の一つであったフランス、オランダ、ポーランド、アメリカ、イスラエル、韓国、中国などの当該分野研究者とのネットワークが確立された。

#### (2) 新たな研究結果

数論的アルゴリズム、およびそこから派生したエルゴード理論の新たな研究結果として公表された主要な成果は下記のとおりである。

有限体を係数とする多項式のArtin型連分数に関する中間近似分数を生成するアルゴリズムが一意に定まらないことを示し、その中で各アルゴリズムに共通するエルゴ-

ド理論的性質を研究し、エントロピーの値を決定した。さらにそれらを無限グラフ (Bruhat-Tits tree) 上の力学系として表現することに成功した。これにより、エルゴード理論と離散幾何への対応の研究への道が拓けた。この成果は[雑誌論文] に公表されている。

有限体を係数とする形式的べき級数に関する非斉次ディオファントス近似の問題に関して、Kurzweil 型定理の精密化を証明した。実数空間における非斉次ディオファントス近似問題は円周上の回転の作る力学系の再帰時間の問題と密接に関係しており、本研究結果も非アルキメデス数体上の対応する問題への応用を現在検討している。この成果は[雑誌論文] に公表されている。

ユークリッドアルゴリズムの計算コストについてはこれまで bit complexity とよばれる関数が最も詳しい評価を与えるものとして知られている。今回の研究では、有限体を係数とする二つの多項式に対するユークリッドアルゴリズムの計算コストとして、fine bit complexity と名付けたさらに詳しい評価関数を導入し、それによりユークリッドアルゴリズムのコスト評価を行った。評価方法として母関数を用いた組合せ論的な方法と極限としての連続空間でのエルゴード理論を用いた方法を比較することにより、離散の極限としての連続と連続の近似として離散の二つの考え方の対比を議論した。これにより、三つ以上の多項式に対する様々なユークリッドアルゴリズムの優劣を fine bit complexity により比較することを可能にした。研究前半は[雑誌論文] にすでに公表されており、後半部分は共同研究者によりすでに国内外の研究集会で公表されており現在論文を準備中である。

ほとんどすべての実数  $x$  に対して部分列  $n(k) \cdot x$  の三角関数の値が重複対数の法則に従うような自然数の部分列  $(n(k))$  で  $n(k+1) - n(k) \leq 2$  を満たすものが存在することを証明した。このようなことは中心極限定理では成り立たないことが、Bobkov-Gotze により証明されている。今回の結果により、gap series に対する中心極限定理と重複対数の法則の違いが明確になった。この結果は[雑誌論文] に公表されている。

単位区間上の一様分布列の誤差の評価において、discrepancy の評価を行った。とりわけ、Hadamard 条件を満たす一様分布列に対して、長さ  $N$  の列の star-discrepancy に対してその重複対数の法則に関して下からの評価を得ることに成功した。また、一定の条件の下で、discrepancy と star-discrepancy の値が一致することを証明した。この結果は[雑誌論文] に公表されている。

Adler-Keane-Smorodinsky のアイデアに基づき有限体を係数に持つ形式的べき級数の Artin 型連分数に対する normal sequence の構成に成功した。この A-D-S の構成法は古

典型的な Champernowne による 10 進展開に対する正規数の構成法の連分数展開への変形と考えられる。それを Artin 型連分数に適用することで可算無限の係数値をとる展開列について正規列の構成法とエルゴード理論における Shannon-McMillan の定理との関係を明確にすることに成功した。このアイデアから、非ユークリッド数体の場合に形式的べき級数と連分数の双方で正規あるいは片方のみで正規となる列の構成について研究の足掛かりが作られると考えている。現在、この問題について新たに研究を開始している。これまでの研究成果は[雑誌論文] において公表予定である。

複素数の Gauss 数体による近似を与える Hurwitz 連分数変換の絶対連続不変確率測度を変換の自然拡大を複素 2 次元空間の中に構成することにより決定した。この問題はフラクタルな境界を持つ領域の特徴づけであるため困難で、長年にわたって未解決であった。本研究では、複素数に対してある種の良い近似分数はすべて Hurwitz 連分数の近似として現れていることを示し、これの応用としてこれまでの研究の困難さを克服した。これにより形式的な自然拡大領域が正のルベク測度を持つことが示され、自然拡大が構成された。自然拡大の不変測度が複素 2 次元空間での双曲測度で与えられることから、Hurwitz 連分数変換の絶対連続不変測度は自動的に決定される。この成果については現在論文を準備中である。さらに、Hurwitz による Eisenstein 数体による近似を与える連分数変換についてもまったく同様の結果が得られると考え現在その研究も進行中である。Gauss 数体の場合についてはすでに[学会発表]、において国外で研究結果を公表している。

区間交換のアルゴリズムのエルゴード理論における基本的道具となる Rauzy induction の自然拡大の構成が da Rocha によるアルゴリズムと関係のあることは一部の研究者の間で漠然と 予期されていた。本研究では、da Rocha のアルゴリズムそのものではなく、実は flip のないアルゴリズムであることを示した。これにより、Rauzy induction の自然拡大が構成され、Teichmüller flow の新しい横断面の構成が可能になることが分かった。さらにこの自然拡大のある誘導変換が、Zorich map の自然拡大となっていることが示されている。この自然拡大の構成により、区間交換と円周上の piecewise rotation の間のある種の双対性が明らかになった。このとき、円周上の一つの piecewise rotation がどのような Rauzy class を決定するかどうかの問題について現在研究を継続中である。これまでの結果は[雑誌論文] に発表予定である。

現在の Ergodic Ramsey 理論の最も重要な未解決問題としてエルデン予想がある。無限大の不変測度を持つエルゴード的変換の多重再帰性の問題は、この問題解決のための重

要な方法の一つとされている。本研究では過去に代表者と海外研究協力者 J. Aaronson (Tel Aviv 大) のマルコフ連鎖に対する結果を拡張し、定負曲率面上の測地線の作る力学系の多重再帰性の判定条件を得ることができた。これにより、多重再帰性の問題が Ergodic Ramsey 理論にとどまらず幾何学的な問題にも広く意味を持つことが明らかにされた。この結果は[雑誌論文] に発表予定である。

以上、の研究成果により、ディオファントス近似論の測度論的理論、(グラフ理論を含む) 離散数学、双曲面および平坦面の幾何学、数論を統括的に議論することの重要性が具体的な研究結果を基に明らかにされた。また、この研究の帰結として多くの新たな問題が発生した。とりわけ、複素連分数の自然拡大と Tiling 理論、無限大不変測度を持つエルゴード的変換の多重再帰性と等差数列に関するエルデシ予想、Rauzy induction と translation surfaces のクラス分けに関するいくつかの新しい問題の解決は、現在のエルゴード理論とその周辺分野において重要であると考えられる。

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 20 件)

J. Aaronson, H. Nakada, On multiple recurrence and other properties of “nice” infinite measure preserving transformations, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 巻未定, 2016, 査読有, DOI : 10.1017/etds.2015.108

K. Inoue, H. Nakada, On the duality of Rauzy induction, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 巻未定, 2016, 査読有, DOI : 10.1017/etds.2015.89

C. Aistleitner, K. Fukuyama, Extremal discrepancy behavior of lacunary sequences, *Monatshefte für Mathematik*, 177, 2015, 167–184, 査読有, DOI : 10.1007/s0065-0014-0693-4

D.H. Kim, H. Nakada, R. Natsui, On the construction of continued fraction normal series in positive characteristic, *Tokyo Journal of Mathematics*, 巻未定, 2016, 査読有, DOI : 未定

A. Atsui, Value distribution of leafwise holomorphic maps on complex lamifications, *Journal of Mathematical Society of Japan*, 巻未定, 2016, 査読有, DOI : 未定

K. Fukuyama, N. Kari, The central limit

theorem for complex Riesz-Raikov sums, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris, Setie I*, 351, 2015, 749–752, 査読有, DOI : 10.1016/j.crma.2015.04.020

H. Nakada, R. Natsui, On the equivalence relations of  $\beta$ -continued fractions, *Indagationes Mathematicae (N.S.)*, 25, 2014, 800–815, 査読有, DOI : 10.1016/j.indag.2014.02.006

D.H. Kim, S.H. Lim, H. Nakada, R. Natsui, Farey maps, Diophantine approximation and Bruhat-Tits tree, *Finite Fields and their Applications*, 30, 2014, 14–32, 査読有, DOI : 10.1016/j.ffa.2014.05.007

K. Fukuyama, A metric discrepancy result for the sequence of powers of minus two, *Indagationes Mathematicae*, 25, 2014, 497–504, 査読有, DOI : 10.1016/j.indag.2013.12.002

V. Berthe, H. Nakada, R. Natsui, B. Vallee, Fine costs for Euclid's algorithm on polynomials and Farey maps, *Advances in Applied Mathematics*, 54, 2014, 27–65, 査読有, DOI : 10.1016/j.aam.2013.11.001

C. Aistleitner, K. Fukuyama, Y. Furuya, Optimal bound for the discrepancies of lacunary sequences, *Acta Arithmetica*, 158, 2013, 229–243, 査読有, DOI : 10.4064/aa158-3-3

K. Fukuyama, Metric discrepancy result for alternating geometric progressions, *Monatshefte für Mathematik*, 171, 2013, 33–63, 査読有, DOI : 10.1007/s00605-012-0419-4

D.H. Kim, H. Nakada, R. Natsui, A refined Kurzweil type theorem in positive characteristic, *Finite Fields and their Applications*, 20, 2013, 64–75, 査読有, DOI : 10.1016/j.ffa.2012.12.002

C. Aistleitner, K. Fukuyama, On the law of the iterated logarithm for trigonometric series with bounded gaps, *Probability Theory Related Fields*, 154, 2012, 607–620, 査読有, DOI : 10.1007/s00440-011-0378-z

R. Farooq, T. Fleiner, A. Tamura, Matching with partially ordered contracts, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 29, 2012, 401–417, 査読有, DOI : 10.1007/s13160-012-0073-1

〔学会発表〕(計 35 件)

K. Fukuyama 他, Metric discrepancy results for geometric progressions with large ratios, 日本数学会年会統計数学分科会, 2016 年 3 月 17 日, 筑波大学(茨城県・つくば市)

H. Nakada, On equivalence relations of continued fractions, *Combinatoire et Theorie des Nombres*, 2016 年 3 月 15 日, Lyon (France)

H. Nakada, On a construction of normal series with respect to Artin continued fractions, *Substitutions and continued fractions*, 2016 年 3 月 9 日, Paris (France)

H. Ei, R. Natui, On absolutely continuous invariant measures for complex continued fraction maps, *Substitutions and continued fractions*, 2016 年 3 月 8 日, Paris (France)

H. Nakada, On multiple recurrence, *Seminar in Ergodic Theory-Keio 2016*, 2016 年 1 月 23 日, 慶應義塾大学日吉キャンパス(神奈川県・横浜市)

A. Atsui, 複素葉層構造に付随した拡散過程と葉向正則写像, 2015 年度確率論シンポジウム, 2015 年 12 月 15 日, 岡山大学(岡山県・岡山市)

K. Fukuyama 他, Metric discrepancy results for complex geometric progressions, 日本数学会秋季総合分科会統計数学分科会, 2015 年 9 月 13 日, 京都産業大学(京都府・京都市)

H. Nakada, On the dual map of the Rauzy induction, *Workshop on Measurable and Topological Dynamical Systems*, 2015 年 7 月 1 日, Daejeon (Korea)

H. Nakada, How to find the absolutely continuous invariant measure for continued fraction maps, *Ergodic Theory and Combinatorics Conference*, 2015 年 6 月 9 日, Kristiansand (Norway)

K. Fukuyama 他, On permutational invariance of the metric discrepancy results, 日本数学会年会統計数学分科会, 2015 年 3 月 21 日, 明治大学(東京都・中野区)

K. Fukuyama 他, 有界間隙列の重複対数の法則について II, 日本数学会秋季総合分科会, 2014 年 9 月 26 日, 広島大学(広島県・東広島市)

H. Nakada, On the natural extension of the Rauzy-Veech induction map, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2014 年 5 月 12 日, Torun (Poland)

H. Nakada, On the notion of normal numbers for alpha continued fractions, *Probability, Ergodic Theory, Dynamical Systems*, 2014 年 4 月 10 日, Tel Aviv (Israel)

A. Atsui, 有理型関数の値分布と拡散過

程, RIMS 研究集会「確率解析」, 2014 年 3 月 19 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

K. Fukuyama 他, The central limit theorem for subsequences of Erdos-Fortet sequence, 日本数学会年会統計数学分科会, 2014 年 3 月 15 日, 学習院大学(東京都豊島区)

M. Hama, Multidimensional subshifts arising from non-primitive substitutions, *数論とエルゴード理論*, 2014 年 2 月 8 日, 金沢大学サテライトプラザ(石川県・金沢市)

H. Nakada, On the duality between piecewise rotations of the circle and interval exchange maps, *Warwick-Keio Seminar in Ergodic Theory*, 2014 年 1 月 10 日, Coventry (UK)

R. Natsui, The equivalence relations of  $\alpha$ -continued fractions, *Measurable and Topological Dynamical Systems-Keio 2013*, 2013 年 12 月 13 日, 慶應義塾大学日吉キャンパス, 横浜市(神奈川県)

K. Fukuyama, 等比数列の一様分布論, 日本数学会秋季総合分科会統計数学分科会, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学(愛媛県・松山市)

A. Atsui, Value distribution of leaves of complex foliations in complex projective spaces, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺, 2013 年 6 月 8 日, 龍谷大学深草キャンパス(京都府・京都市)

⑳ H. Nakada, On the equivalence relation of  $\alpha$ -continued fractions, *Continued Fractions, Interval Exchanges and Applications to Geometry*, 2013 年 6 月 14 日, Pisa (Italy)

㉑ H. Nakada, On realization of the natural extension of the continued fraction transformations, *Probability and Numbers*, 2013 年 4 月 3 日, Delft (The Netherlands)

㉒ K. Fukuyama, Metric discrepancy results for Erdos-Fortet sequence, 日本数学会年会統計数学分科会, 2013 年 3 月 20 日, 九州大学(福岡県・福岡市)

㉓ R. Natsui, On the existence of the Legendre constant for  $\alpha$ -continued fractions, *Ergodic Theory and Metric Number Theory*, 2012 年 12 月 6 日, 日本女子大学新泉山会館(東京都・文京区)

㉔ H. Nakada, On the dual of Rauzy induction, *Workshop on Infinite Ergodic Theory*, 2012 年 6 月 30 日, Gildford (UK)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

仲田 均 (NAKADA, Hitoshi)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号: 40118980

(2)研究分担者

厚地 淳 (ATSUJI, Atsushi)  
慶應義塾大学・経済学部・教授  
研究者番号：00221044

田村 要造 (TAMURA, Yozo)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号：50171905

田村 明久 (TAMURA, Akihisa)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号：50217189

研究分担者

福山 克司 (FUKUYAMA, Kstusi)  
神戸大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：60218956

夏井 利恵 (NATSUI, Rie)  
日本女子大学・理学部・准教授  
研究者番号：60398633

浜 正樹 (HAMA, Masaki)  
文京学院大学・外国学部・准教授  
研究者番号：90389875

井上 賀絵 (INOUE, Kae)  
慶應義塾大学・薬学部・講師  
研究者番号：90621011

石川 史郎 (ISHIKAWA, Shiro)  
慶應義塾大学・理工学部・非常勤講師  
研究者番号：10051913

(3)連携研究者

盛田 健彦 (MORITA, Takehiko)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：00192782

江居 宏美 (EI, Hiromi)  
弘前大学・大学院理工学研究科・助教  
研究者番号：60333051