

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 1 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24340021

研究課題名(和文) グラフの因子, マイナー, 部分グラフに関する極値問題の総合的研究

研究課題名(英文) Integrated research of extremal problems on graph factors, minors and subgraphs

研究代表者

太田 克弘 (Ota, Katsuhiro)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：40213722

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,600,000円

研究成果の概要(和文)：極値グラフ理論の問題は、グラフ  $H$  を固定するとき、与えられたグラフ  $G$  が  $H$  と同型な部分グラフを含むための辺数あるいは最小次数に関する最善の十分条件を求めることである。本研究では、因子問題、マイナー、部分グラフに関する問題を統一的な視点から俯瞰することにより、新たな問題提起を行い、展開研究を行った。とくに、森グラフの極値問題、弦付きサイクルやシータグラフを点素に見つける問題、マッチング拡張性などを重点的に扱った。また、グラフ理論の大きな未解決問題の一つである Hadwiger 予想との関連において、グラフの彩色の概念を導入し、次数列に関する Hadwiger 予想の簡潔な証明を与えた。

研究成果の概要(英文)：The problems in extremal graph theory is to find the minimum number of edges or a sharp minimum degree condition for a graph  $G$  to contain a prescribed subgraph  $H$ . In this research, by considering the problems from the unified point of view of factor problems, graph minor problems, and subgraph finding problems, we shall go into a new area of extremal graph theory. In particular, we focus on extremal problems of forests, vertex-disjoint chorded cycles and theta subgraphs, matching extendability, etc. Also, related to Hadwiger's conjecture, one of the most famous conjectures in graph theory, we propose the notion of rho-coloring, and give an alternative and much simpler proof of Hadwiger's conjecture for degree sequences.

研究分野：離散数学

 キーワード：グラフ理論 極値問題 弦付きサイクル シータグラフ マッチング拡張性 Hadwiger 予想 禁止部分  
グラフ

## 1. 研究開始当初の背景

グラフ理論における典型的な極値問題の設定は、グラフ  $H$  を固定するとき、与えられたグラフ  $G$  が  $H$  と同型な部分グラフを含むための辺数あるいは最小次数に関する最善の十分条件を求めることである。この問題は、 $H$  が完全グラフである場合の Turan の定理を出発点として、Erdos-Stone の定理により、 $H$  の染色数が 3 以上の場合には、漸近的な意味において完全解決している。この意味は、与えられた  $H$  を部分グラフとして含むために必要なグラフ  $G$  の辺の数・最小次数に関する最善の条件が、 $G$  の頂点数に関するオーダーとその最高次の係数まで決定されている、ということである。しかし興味深いことに、 $H$  が 2部グラフの場合にはこの問題は未解決であり、辺数・最小次数の頂点数によるオーダーも完全には決定されていない。いくつかの特別な 2部グラフ  $H$  について決定されているのみである。さらに興味深いことに、 $H$  が森グラフのときですら完全解決されていない。

グラフ  $G$  と  $H$  の頂点数が等しい場合、つまり全域部分グラフを見つける問題が、因子問題である。見つけるべき全域部分グラフをその同型類で指定するのではなく、各頂点の次数条件で与える次数因子については、Tutte の  $f$ -因子定理や Lovasz の  $(g, f)$ -因子定理により必要十分条件が知られており、多項式時間で存在判定ができることも知られている。存在すべき因子に同型類を与える場合や、次数制約であっても連結な全域部分グラフを見つける問題などは、ハミルトン閉路問題とも関連し、多くの問題が NP 困難となる。連結因子の特別なケースである、次数制約のついた全域木に関しては、存在のための十分条件について近年盛んに研究され始めたところである。連結成分の形に制限を与えた因子については、多項式時間で解ける問題とそうでない問題が存在し、興味深い研究対象である。

マイナーの存在については、固定されたグラフをマイナーとして含むかどうかは多項式時間で求められることが知られており、完全グラフなどの典型的なグラフをマイナーとして含むための辺の数・最小次数に関する極値問題は、Hadwiger 予想（染色数と完全マイナーの関係に関するもの）との関連により、よく研究されている。しかし、辺の縮約の回数に制限を与えた場合など、極値問題としてはまだあまり研究の進んでいない部分もある。これは、独立数が 2 のグラフに対する Hadwiger 予想ですら難しい問題であることと関連する。

## 2. 研究の目的

グラフの部分グラフ、因子、マイナーについての極値問題は、通常まったく別の問題として研究されており、互いの関連にはあまり言及されていない。一方で、ある種の誘導部

分グラフやマイナーを含まないグラフは、特定の因子を含みやすくなる、という例もある。たとえば、クローと呼ばれるグラフを誘導部分グラフとして含まない偶数頂点の連結グラフは、完全マッチングを持つことが知られている。この例のように、部分グラフ、因子、マイナーの間の関連を考え、総合的にこれらの極値問題を考えていくことが、本研究課題の目的である。

与えられたグラフ  $H$  を部分グラフとして含むための辺の数・最小次数に関する極値問題は、グラフ  $H$  の染色数が大きく関わっていることがわかっている。2部グラフ（染色数が 2 の場合）については未解決の問題が多く残されているが、退化数 ( $k$ -degenerated の概念) が関係するであろうということが予想されている。さらに、閉路を含まないケースではさらに繊細なグラフ不変量が必要になることが見込まれる。グラフが簡単になれば問題は通常簡単になるはずであるが、この問題においては、グラフが簡単になるほど極値問題の解のオーダーが真に低くなるため、その正確な漸近値を決定するのが難しくなる。一見より単純な問題に見えるが、実はより詳細な極値条件を扱わなければいけないところが、この問題の特徴である。頂点数が  $n$  で辺数が  $(k-1)n/2$  より大きいグラフは、 $k$  辺からなる任意の木を部分グラフとして含むであろう、という Erdos-Sos の予想が、長年にわたって未解決であったことは、この種の問題の難しさを物語っている。

このような極値問題の研究は、問題設定としては古くから盛んに研究がなされてきた問題の一部といえる。しかし、部分グラフの極値問題、因子問題、マイナーに関する問題は、それぞれ独立に議論されてきた。複数の構造を並行して考え、それらの関連に着目した研究はほとんどなく、それが本研究の学術的特色の一つといえる。このような新たな統合的観点からの未解決問題への取り組みは、グラフ理論の発展に大きな意義を持つのは間違いない。

## 3. 研究の方法

研究代表者および研究分担者、連携研究者は、これまでに多くの共同研究実績がある。とくに、グラフの閉路、因子、全域木などに関して顕著な研究成果を残してきており、それらをベースとして発展させていく形で、本研究課題で扱う極値問題の解決にあたった。本研究課題は、グラフ理論の根幹をなす問題と直接関係し、ラムゼー理論、因子理論、閉路問題、彩色問題など多くのグラフ理論研究と関連する。研究の初期の段階においては、それらの既存研究を極値問題の観点から見直すことにより、鍵となるグラフ不変量の発見を目指した。また新たな方向性として、因子、マイナー、部分グラフを総合的に捉えることにより、これらの部分構造について互いの関連性に着目した極値問題の研究を進め

た．本研究課題は，上述のように，グラフ理論の幅広い問題と関連するため，研究にあたっては，国内外の多くの関連研究者との議論が必要であり，国内外研究集会での情報収集および研究討論を軸に研究を進めた．中でも，毎年2～3月に慶應義塾大学で開催した組合せ論若手研究集会においては，本研究課題の研究分担者や連携研究者を含めた若手研究者が多数参加し，活発な研究者交流および研究討論が行われ，本研究課題の研究進展に大きな役割を果たした．

#### 4．研究成果

与えられた森グラフを含むための条件に関する Brandt (1994) の定理によれば， $H$  を辺数  $k$  の森グラフとすると，最小次数が  $k$  以上のグラフには必ず  $H$  と同型な部分グラフが存在することが知られている．この最小次数条件は，いくつかの森グラフについては最善であるが，多くの森グラフでは最善の値ではないことが知られていたが，本質的に， $H$  が木とマッチングのときのみが最小次数  $k$  を必要とすることがわかった．また，森グラフに関する極値問題に関連して，木とスターグラフに対するグラフラムゼー数に関する研究を行った．木  $T$  とスターグラフに対するグラフラムゼー数  $R$  は，頂点数  $R$  のグラフにおいて最小次数がどのくらい以上であれば  $T$  を部分グラフとして含むか，という問題に対応する．この問題は， $R$  が  $T$  の頂点数に近くなるにつれて難しくなるが，これまで知られている結果より広い範囲の  $T$  とスターグラフに対してラムゼー数を決定することができた．

指定されたいくつかの辺に対しそれらを含む完全マッチングを見つけるマッチング拡張性の問題においては，顕著な成果が挙げられた．5 連結平面グラフにおいて，指定された辺のばらつき具合を考慮に入れた拡張性について，何本の辺までが指定できるかに関して最善の結果を得ることができた．とくに辺同士が互いに距離 4 以上である場合には，何本指定してもそれらを含む完全マッチングが存在することを示した．この結果はさらに，射影平面上やクラインの壺上の三角形分割における研究へと広がり，多くの条件の下で最善の値を決定した．

グラフの極値問題の中でも，点素なサイクルの存在に関するものは数多くの研究がある．サイクルより辺数の多い，弦付きサイクル，シートグラフを点素に見つける問題を扱い，特に同型なそのようなグラフが  $k$  個点素に見つかるための次数条件についての研究を行った．頂点数が十分に大きいグラフにおいては，弦付きサイクルについては最小次数  $3k+c$  ( $c$  は定数) を，シートグラフについては最小次数  $2k+1$  を仮定すると  $k$  個の同型な部分グラフが点素に見つかることが示された．帰結として，同じ長さの点素な偶サイクルの存在に関する結果も導かれる．こ

の研究結果の手法を精査することにより， $s$  本の弦を含むサイクルや，サイクルに  $s$  本のパスを付加して得られるような構造を持ったグラフに一般化する研究も行った．

グラフ理論における最も有名な未解決問題の一つに Hadwiger 予想がある．これは， $k+1$  頂点の完全グラフをマイナーとして含まないグラフは， $k$ -彩色可能であろう，というもので，平面グラフに対する四色定理の一般化かつ拡張となっている．この予想に関連して本研究では，完全マイナーと彩色を結びつける概念である 彩色を導入し研究を行った．まずこの概念の導入により，Hadwiger 予想を弱めた「次数列に関する Hadwiger 予想」の簡潔な証明を与えた．また，彩色と，Hadwiger 数，染色数，マイナーの関係について調べ，一定の成果を挙げた．

グラフが含む局所的な部分構造とそのグラフ全体にわたる種々の性質との関連に関する研究においていくつかの進捗があった．局所的な部分構造としては，これまで多く研究がなされている禁止誘導部分グラフに焦点をあてた．頂点数の十分大きなグラフが，一定以上のタフネスを持つこと，完全マッチングやそれに準じた構造を持つこと，などをインプライする禁止誘導部分グラフ集合の完全決定について成果が挙げられた．グラフのタフネスは，そのグラフから取り除く頂点数とそれにより生じる連結成分数の比に関する不変量で，完全マッチングの存在やハミルトン閉路の存在とも関係することから，今後の極値問題の研究においても重要な役割を果たす可能性が大きい．

#### 5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

1 Y. Egawa, J. Fujisawa, M.D. Plummer, A. Saito and T. Yamashita: Perfect matchings avoiding prescribed edges in a star-free graph, *Discrete Math.* 338 (2015), 2260–2274 (査読有).

DOI:10.1016/j.disc.2015.05.014

2 Y. Egawa, J. Fujisawa, M. Furuya, M.D. Plummer and A. Saito: Forbidden triples generating a finite set of 3-connected graphs, *Electron. J. Combin.* 22 (2015), Paper 3.13 (査読有).

<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v22i3p13>

3 G. Chen, R.J. Gould, K. Hirohata, K. Ota and S. Shan: Disjoint chorded cycles of the same length, *SIAM J. Discrete Math.* 29 (2015), 1030–1041 (査読有).

DOI:10.1137/130929837

- 4 G. Chen and K. Ota: Hadwiger's conjecture for degree sequences, *J. Combin. Theory Ser. B* 114 (2015), 247–249 (査読有).  
DOI:10.1016/j.jctb.2015.03.006
- 5 J. Fujisawa and K. Ota: Edge proximity conditions for extendability in planar triangulations, *J. Graph Theory* 80 (2015), 1–11 (査読有).  
DOI:10.1002/jgt.21827
- 6 R.E.L. Aldred and J. Fujisawa: Distance-restricted matching extension in triangulations on the torus and the Klein bottle, *Electron. J. Combin.* 21 (2014), Paper 3.39 (査読有).  
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v21i3p39>
- 7 J. Fujisawa, M.D. Plummer and A. Saito: Forbidden subgraphs generating a finite set, *Discrete Math.* 313 (2013), 1835–1842 (査読有).  
DOI:10.1016/j.disc.2012.05.015
- 8 K. Ota, K. Ozeki and G. Sueiro: Forbidden induced subgraphs for near perfect matchings, *Discrete Math.* 313 (2013), 1267–1280 (査読有).  
DOI:10.1016/j.disc.2013.01.020
- 9 K. Ota and G. Sueiro: Forbidden induced subgraphs for toughness, *J. Graph Theory* 73 (2013), 191–202 (査読有).  
DOI:10.1002/jgt.21667
- 10 J. Fujisawa: Forbidden subgraphs for hamiltonicity of 3-connected claw-free graphs, *J. Graph Theory* 73 (2013), 146–160 (査読有).  
DOI:10.1002/jgt.21663
- 11 J. Fujisawa, A. Nakamoto and K. Ozeki: Hamiltonian cycles in bipartite toroidal graphs with a partite set of degree four vertices, *J. Combin. Theory Ser. B* 103 (2013), 46–60 (査読有).  
DOI:10.1016/j.jctb.2012.08.004
- 12 K. Ota and G. Sueiro: Forbidden induced subgraphs for perfect matchings, *Graphs Combin.* 29 (2013), 289–299 (査読有).  
DOI:10.1007/s00373-011-1102-6
- 13 A. Nakamoto, K. Ota and K. Ozeki: Book embedding of toroidal bipartite graphs, *SIAM J. Discrete Math.* 26 (2012), 661–669 (査読有).  
DOI:10.1137/100794651
- 14 K. Ota and K. Ozeki: Spanning trees in 3-connected  $K_{3,t}$ -minor-free graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 102 (2012), 1179–1188 (査読有).  
DOI:10.1016/j.jctb.2012.07.002
- 15 J. Fujisawa and K. Ota: Maximal  $K_3$ 's and Hamiltonicity of 4-connected claw-free graphs, *J. Graph Theory* 70 (2012), 40–53 (査読有).  
DOI:10.1002/jgt.20599
- 16 S. Chiba, J. Fujisawa, M. Tsugaki and T. Yamashita: Long cycles in unbalanced bipartite graphs, *Discrete Math.* 312 (2012), 1857–1862 (査読有).  
DOI:10.1016/j.disc.2012.02.019
- [学会発表](計 25 件)
- 1 K. Ota: Small theta subgraphs in sparse graphs, 2017 Joint Mathematical Meetings (招待講演), 2017年1月6日, Atlanta(アメリカ).
- 2 J. Fujisawa: Recent progress on matching extendability of graphs on surfaces, ACCOTA2016, International Workshop on Combinatorial and Computational Aspects of Optimization, Topology and Algebre, 2016年12月1日, Los Cabos (メキシコ).
- 3 藤沢潤: 距離条件を用いたマッチング拡張性について, 離散数学とその応用研究集会 2016, 2016年8月20日, 高城コミュニティセンター(宮城県・松島町).
- 4 J. Fujisawa: Forbidden pairs of graphs generating almost the same sets, The 4th Japan-Taiwan Conference on Combinatorics and its Applications, 2016年3月5日, 北九州国際会議国際会議場(福岡県・北九州市).
- 5 荻野祐一, 太田克弘: グラフの  $k$ -coloring と Hadwiger 数, 応用数学合同研究集会, 2015年12月17日, 龍谷大学(滋賀県・大津市).
- 6 J. Fujisawa: Matching extension in triangulations of the projective plane, The Second Sino-Japan Symposium on Graph Theory, Combinatorics and their Applications, 2015年11月2日, 東京理科大学(東京都・新宿区).
- 7 太田克弘, 江川嘉美, 藤田慎也, 佐久間雅: グラフが同じ長さの点素な偶閉路を含むための次数条件, 日本数学会秋季総合分

科会, 2015年9月14日, 京都産業大学(京都府・京都市).

8 藤沢潤: 射影平面の三角形分割におけるマッチング拡張性, 日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月13日, 京都産業大学(京都府・京都市).

9 J. Fujisawa: Recent progress on matching extendability in triangulations of surfaces, The 9th KIAS Combinatorics Workshop (招待講演), 2015年9月11日, Yangyeong (韓国).

10 藤沢潤: 射影平面上のグラフのマッチング拡張と距離条件, 離散数学とその応用研究集会 2015, 2015年8月22日, 熊本大学(熊本県・熊本市).

11 荻野祐一, 太田克弘: グラフの  $k$ -coloring について, 離散数学とその応用研究集会 2015, 2015年8月22日, 熊本大学(熊本県・熊本市).

12 井出光, 太田克弘: regular graph の total edge-connectivity について, 応用数学合同研究集会, 2014年12月18日, 龍谷大学(滋賀県・大津市).

13 小林祐人, 太田克弘: 3-choosable となる完全多部グラフについて, 応用数学合同研究集会, 2014年12月18日, 龍谷大学(滋賀県・大津市).

14 江川嘉美, 藤田慎也, 太田克弘, 佐久間雅: Vertex-disjoint even cycles of the same length in large graphs, 応用数学合同研究集会, 2014年12月18日, 龍谷大学(滋賀県・大津市).

15 J. Fujisawa: Edge proximity conditions for extendability in triangulations of surfaces, The First Sino-Japan Symposium on Graph Theory, Combinatorics, and their Applications (招待講演), 2014年10月30日, 2014年10月30日, Beijing (中国).

16 藤沢潤: 射影平面上のグラフのマッチング拡張問題について, 日本数学会秋季総合分科会, 2014年9月25日, 広島大学(広島県・広島市).

17 S. Fujita, K. Ota and T. Sakuma: Vertex-disjoint isomorphic theta subgraphs, 2014 SIAM Conference on Discrete Mathematics, Minisymposium: Cycles and Paths (招待講演), 2014年6月17日, Minneapolis (アメリカ).

18 S. Fujita, K. Ota and T. Sakuma:

Vertex-disjoint isomorphic theta subgraphs, The 3rd Taiwan-Japan Conference on Combinatorics and its Applications (招待講演), 2014年3月21日, Chiayi (台湾).

19 G. Chen, R.J. Gould, K. Hirohata, K. Ota and S. Shan: Disjoint chorded cycles of the same length, 日本数学会秋季総合分科会, 2013年9月26日, 愛媛大学(愛媛県・松山市).

20 太田克弘: Clique minors, chromatic numbers for degree sequences, 日本数学会 2013 年度年会, 2013年3月20日, 京都大学(京都府・京都市).

21 K. Ota: Topological minor, chromatic number, and degree sequence, 4th Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2012年11月27日, Honolulu (アメリカ).

22 A. Tamura: Matching with partially ordered contracts, The Second International Workshop on Matching Under Preferences, 2012年7月20日, Budapest (ハンガリー).

23 K. Ota: Forbidden induced subgraphs for toughness, International Conference on Cycles in Graphs, 2012年6月2日, Nashville (アメリカ).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

太田 克弘 (OTA Katsuhiko)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号: 40213722

### (2) 研究分担者

田村 明久 (TAMURA Akihisa)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号: 50217189

小田 芳彰 (ODA Yoshiaki)  
慶應義塾大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 90325043

石井 一平 (ISHII Ippei)  
慶應義塾大学・理工学部・非常勤講師  
研究者番号: 90051929

藤沢 潤 (FUJISAWA Jun)  
慶應義塾大学・商学部・准教授  
研究者番号: 00516099

### (3) 連携研究者

山下 登茂紀 (YAMASHITA Tomoki)  
近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号：10410458  
(平成27年度より，研究協力者)

(4)研究協力者

榎本 彦衛 (ENOMOTO Hikoe)  
元広島大学大学院・教授

小関 健太 (OZEKI Kenta)  
国立情報学研究所・特任助教

土屋 翔一 (TSUCHIYA Shoichi)  
専修大学・講師 (平成26, 27年度)

野口 健太 (NOGUCHI Kenta)  
東京電機大学・助教 (平成27年度)

佐久間 雅 (SAKUMA Tadashi)  
山形大学・准教授 (平成26, 27年度)