

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 18 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24340023

研究課題名(和文)無限次元空間上の確率解析

研究課題名(英文)Stochastic Analysis on infinite dimensional spaces

研究代表者

会田 茂樹 (Aida, Shigeki)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：90222455

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 5,300,000円

研究成果の概要(和文)：確率解析に現れる無限次元空間上のOU作用素の性質を研究した。これは有限次元空間においてディリクレ形式に対応して得られる生成作用素のスペクトルギャップの準古典極限の漸近挙動の研究の無限次元版である。特に、回転対称なリーマン多様体で曲率が負で大きな変動が無い場合、全空間の作用素のスペクトルギャップがやはり測地線におけるエネルギー関数の第2変分で決定されることを示した。

また、確率過程に関する微分方程式、特にラフパスで駆動される微分方程式の性質を研究した。特に反射壁のWong-Zakai近似が真の解に収束すること、反射壁を持つ場合のラフパスで駆動される微分方程式の解の存在を証明した。

研究成果の概要(英文)：We studied the spectral property of OU operators on infinite dimensional spaces. This is an infinite dimensional version of the study of semiclassical behaviour of the spectral gap of the operator. We determined the asymptotic behaviour of the spectral gap of the OU operator on a loop space of the rotationally symmetric Riemannian manifold by the hessian of the energy function at the geodesic.

Also we studied stochastic differential equations and rough differential equations. We proved that the Wong-Zakai approximation solution of the reflected stochastic differential equation converges to the solution and formulated reflected rough differential equations and proved the existence of the solutions.

研究分野：確率論

キーワード：確率解析 無限次元解析 ラフパス 確率微分方程式 スペクトル 場の量子論

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式への応用において、バナッハ空間などの関数空間での変分法などの非線形解析は重要な手法である。一方、確率論においては、確率微分方程式の解は典型的な非線形汎関数であるが、その解析には、この通常非線形解析だけでは不十分で、マリアバン解析やその変形、さらにはラフパス解析など新しい理論が必要である。会田は、これまでこれらの理論の基礎研究とともに無限次元空間上の作用素のスペクトル解析(準古典極限など)を行ってきた。これを踏まえて研究計画を立てた。

2. 研究の目的

連続な道(パス)や写像の空間、超関数の空間などの無限次元空間には、ルベグ測度のようないくつかの測度は存在しないが、Wiener 測度、拡散測度、ガウス測度などの確率測度が存在する。本研究は確率測度に基づいたこれら無限次元空間上の関数や作用素の解析を行うことを目的とする。具体的には、無限次元空間上の関数空間で定義される2階微分作用素のスペクトル解析を中心に、その解析の基礎を支える

- (1) 対数ソボレフ不等式に代表される関数型不等式の研究、
- (2) ラフパス解析によるパスの汎関数解析、
- (3) 無限次元空間上の測度を準不変に保つ写像の解析、とくに最適輸送写像の視点を入れた研究、を行うことを目的とする。

3. 研究の方法

連携研究者および関連する専門家の意見を参考にしながら、研究を行う。具体的には、

- (1) 問題解決に必要な図書の購入
- (2) 各課題について詳しい専門家を招へいし、議論を行う
- (3) 研究課題に関連する研究集会を開催し、参加者と議論を行う
- (4) 情報収集、研究成果発表のため、関連する研究集会に参加する
- (5) 論文作成、研究成果発表のため、デスクトップ、ノートブック型パソコンの購入を行う。

4. 研究成果

- (1) ループ空間上の Ornstein-Uhlenbeck (= OU)作用素のスペクトルの準古典極限の研究

を行った。Pole を持つ回転対称なリーマン多様体を考える。終点を pole の点とし、始点はある意味で終点の pole に近い固定点とするパスの空間とその上の(条件付き)ブラウン運動の測度を考える。ただし、ブラウン運動の測度は(やや雑な言い方だが)大きなパラメータ λ の逆数が分散になるような確率測度であるとする。この状況で自然に定まるディリクレ形式の生成作用素のスペクトルの下限は0である。双曲型空間の場合は、その上にスペクトルギャップが存在することが、Chen, Li, Wu により示されていた。本研究では、より一般的な上記の状況でスペクトルギャップの存在を新しい証明方法で示した。さらに、 λ が無限大になる準古典極限を取ると、このスペクトルギャップが始点と終点を結ぶ最短測地線におけるパスのエネルギー関数のヘッシアン(これはヒルベルト空間上の有界線形作用素となる)のスペクトルの下限で決まることを明らかにした。

(2) $P(\varphi)_2$ ハミルトニアン(作用素)のスペクトルの準古典極限の下での漸近挙動を研究した。前年度に空間が有限区間の場合で、対応するポテンシャル関数が最小値を取る点(関数)がいくつかあり、かつそこでヘッシアンが非退化の場合、最小固有値の漸近挙動が有限次元の場合と同様に決定されることを示していた。これに引き続き、空間切断の入った空間が実数全体の場合に、最小固有値の漸近挙動が同様に決定されることを示した。さらに、ポテンシャル関数が対称で最小値を取る点が2つあり、かつそこでヘッシアンが非退化の時を考察した。この場合、第一固有値と第二固有値の差はアグモン距離で定まる指数オーダーで0に収束することが予想されるが、実際に少なくともそのオーダー以上の早さで減衰することを示した。下からの評価は今後の課題である。

(3) 反射壁境界条件を持つ確率微分方程式およびラフパスで駆動される微分方程式の研究を行った。まず、佐々木孝介氏と共同で税所、Lion-Sznitman が考察した条件(A),(B),(C)を満たす滑らかとは限らない境界を持つ領域で定義された法線方向に反射する Stratonovich 型確率微分方程式の Wong-Zakai 近似解が真の解に収束することを示した。滑らかでない場合は、Evans-Stroock による弱収束が示されているのみだったが、それを強収束、概収束に強めた結果である。また、ラフパスで駆動される微分方程式の場合は、反射壁を持つ場合の研究は無かったが、この場合の方程式を定式化し、更に解の存在を証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

1. Shigeki Aida, Asymptotics of spectral gaps on

loop spaces over a class of Riemannian manifolds, Journal of Functional Analysis, 269 no.12 (2015),3714-376

査読有,doi:10.1016/j.jfa.2015.09.023

2. Shigeki Aida, Reflected rough differential equations, Stochastic Processes and Their Applications,

125, no.9, (2015), 3570-3595 査読有 doi:10.1016/j.spa.2015.03.008.

3. Shigeki Aida, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces II, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 100, 1--23, 2014, 査読有

<http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-11292-3>.

4. Shigeki Aida and Kosuke Sasaki, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces, Stochastic Process. Appl. 123 (2013), Issue 10, 3800-3827, 査読有 doi:10.1016/j.spa.2013.05.004

5. Shigeki Aida, Tunneling for spatially cut-off $P(\varphi)_2$ -Hamiltonians, J.Funct.Anal. 263 no.9 (2012), 2689—2753, 査読有, doi:10.1016/j.jfa.2012.08.017

〔学会発表〕(計 11 件)

1. Shigeki Aida, Asymptotics of spectral gap on loop spaces over a class of Riemannian manifolds, 確率論と幾何学, 2015年11月10日, 東京工业大学(東京・大岡山).

2. Shigeki Aida, On solutions to reflected rough differential equations, Stochastic Analysis, RIMS International Project Research 2015, 2015年9月5日、京都大学数理解析研究所(京都).

3. Shigeki Aida, Asymptotics of the spectral gap on a loop space over a hyperbolic space, 2014年8月26日, Stochastic Processes, Analysis and Mathematical Physics, 関西大学(大阪・吹田).

4. Shigeki Aida, Wong-Zakai approximations for reflecting SDE, 2013年12月20日, 確率論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所(京都).

5. Shigeki Aida, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces, Stochastic Analysis and Applications, 2013年9月24日, Oxford(UK).

6. Shigeki Aida, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces, 確率解析とその周辺, 2013年9月21日, 京都大学総合人間学部(京都).

7. Shigeki Aida, Tunneling for spatially cut-off $P(\varphi)_2$ -Hamiltonians, 確率論シンポジウム (RIMS 研究集会), 2012年12月20日, 京都大学数理解析研究所(京都).

8. Shigeki Aida, Tunneling for spatially cut-off $P(\varphi)_2$ -Hamiltonians, 量子場の数理解析とその周辺 (RIMS 研究集会), 2012年11月16日, 京都大学数理解析研究所(京都).

9. Shigeki Aida, Tunneling for Spatially cut-off $P(\varphi)_2$ -Hamiltonians, Stochastic Analysis and applications, 2012年9月24日, 岡山大学(岡山).

10. Shigeki Aida, Tunneling for spatially cut-off $P(\varphi)_2$ -Hamiltonians, 変分問題の展開 - 確率論と交錯する変分問題 - 2012年6月12日 京都大学数理解析研究所(京都).

11. Shigeki Aida, Tunneling for spatially cut-off $P(\varphi)_2$ -Hamiltonian Stochastic Analysis and Stochastic PDEs, 2012年4月16日, Warwick(UK).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~aida/index-j.html>

6. 研究組織

(1)研究代表者

会田茂樹 (Aida, Shigeki)
東北大学大学院理学研究科・教授
研究者番号：90222455

(2)研究分担者 なし

(3)連携研究者

重川一郎 (Shigekawa, Ichiro)
京都大学大学院理学研究科・教授
研究者番号：00127234

日野正訓 (Hino, Masanori)
大阪大学大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号：40303888

河備浩司 (Kawabi, Hiroshi)
岡山大学大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：80432904

稲浜譲 (Inahama, Yuzuru)
九州大学大学院数理学研究院・教授
研究者番号：80431998

廣島文生 (Hiroshima, Fumio)
九州大学大学院数理学研究院・教授
研究者番号：00330358

桑田和正 (Kuwada, Kazumasa)
東京工業大学大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：30432032

針谷祐 (Hariya, Yuu)
東北大学大学院理学研究科・准教授
研究者番号：20404030