様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2012～2016
課題番号：２４３４００２５

研究課題名（和文）最大正則性原理の熱力学平衡を組み込んだ自由境界問題への応用

研究課題名（英文）Free boundary problems for flows with phase transitions consistent with thermodynamics based on maximal regularity theorem

研究代表者

清水　扇丈（Shimizu, Senjo）

京都大学・人間・環境学研究科（研究院）・教授

研究者番号：５０２７３１６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　10,700,000円

研究成果の概要（和文）：熱力学平衡を考慮に入れた相転移を含む非圧縮性粘性流体の自由境界問題について適切性と安定性を証明した。有界な非圧縮性2相流体に置いて，自由境界を固定境界に変換することにより，Navier-Stokes方程式は準線形な非線形方程式となるため，線形化問題に対する最大正則性定理を証明し，縮小写像の定理を適用して非線形問題の時間局所適切性を証明した．さらに同モデルに対し平衡解の安定性を解析した．内部初期球面が1つの場合は平衡解は安定で時間大域的適切，球面が2つ以上の場合は平衡解は不安定で，平衡解の近くから出発した解である時間経過後に平衡解から離れる解が存在するという結果が得られた．

研究成果の概要（英文）：We study the basic model for incompressible two-phase flows with phase transitions consistent with thermodynamics in the case of constant but non-equal densities of the phases. We employ the direct mapping approach to transform the problem locally in time to a fixed domain. The proof of local well-posedness is based on maximal regularity of the underlying principal linearization and the contraction mapping principle. We extend our well-posedness result to general geometries, study the stability of the equilibria of the problem, and show that a solution which does not develop singularities exist globally, and if its limit set conatins a stable equilibrium it converge to this equilibrium as time goes to infinity.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：数学解析　Navier-Stokes方程式　自由境界問題　最大正則性　相転移　適切性　安定性

1. 研究開始当初の背景

流体の自由境界問題の研究は, 流速と圧力を考慮せず, 温度のみを未知関数としてエネルギー保存則として導かれる, ステファン問題と呼ばれる熱方程式に対する自由境界問題に始まる. 半沢 ('81) は半沢変換と呼ばれる自由境界の正則性を示すのに現時点でも最も優れている変換を用いて線形ステファン問題を解き, ナッシュの陰関数定理を応用して C^∞ データに対する時間局所 C^∞ 解を構成した. 俣野 ('83) による弱解の研究, 谷-日下 ('99,'02) による古典解, ヘルダー空間での時間局所適切性の研究がある.

逆に温度を考慮せず, 流速と圧力を未知関数として質量保存則と運動量保存則として導出されるのがNavier-Stokes 方程式の自由境界問題である. 領域の形状から, 気泡や液滴（有界領域）の場合と海の波のように水平方向に無限で表面が自由境界である場合（摂動層領域）の場合に分けられる. 有界領域に対しては主にSolonnikov によって L_2 空間やヘルダー空間における時間局所・大域適切性が証明されてきた. 摂動層領域に対しては, Beale ('84), Beale-西田 ('85), 谷-田中 ('95) 等により L_2 空間での時間大域適切性や代数冪で時間減衰する結果が得られてきた.

20 世紀末期から 21 世紀にかけて, 最大正則性は著しくその研究が進捗した. バナッハ 空間 X 上の発展方程式: $u'(t) + Au(t) = f(t)$ $(t > 0)$, $u(0) = 0$ に対し, 解析半群 A が L_p-最大正則性を持つとは, 評価式 $\|u'\|_{L_p((0,T),X)} + \|Au\|_{L_p((0,T),X)} \le C\|f\|_{L_p((0,T),X)}$ を満たすことをいう. 特に, UMD (Unconditinal Martingale Differences) バナッハ空間に対しては $\mathcal{H}^\infty$ calculas や作用素値 Fourier-multiplier の定理の 2 大手法が確立されてきた. 最大正則性の応用として最もその益を受けたものの 1 つが自由境界問題である. 自由境界問題が従来困難であったのは, 自由境界を固定境界に変換することにより, 境界条件を込めて方程式系が準線形となることにあった. 準線形方程式系に対しては, その線形化問題の最大正則性が示されれば, ナッシュの陰関数定理のような複雑な手法を使うことなく簡便な縮小写像の原理によって解の適切性を示すことができる. そのため, 自由境界問題はヨーロッパを中心として世界的に流体・放物型方程式系分野における主要なテーマの 1 つとなっていた. 実際, ステファン問題や Navier-Stokes 方程式の相転移を伴わない自由境界問題に対して, 線形化問題に最大 L_p 正則性を証明する方法で, Solonnikov, Denisova, Prüss, 柴田, 清水等により局所解の適切性の結果が研究開始当初に得られていた.

2. 研究の目的

21 世紀に入り研究の進捗が著しい放物型偏微分方程式の最大正則性原理に着目して, 流体力学の中でも物理・工学の観点から重要な問題である, 熱力学平衡, 即ちエネルギーの出入りを考慮した流体の液相・気体相などの相転移に伴う自由境界問題の（以下これを相転移モデルと呼ぶ）適切性・安定性を解析することを目的とする. さらに, 放物型方程式系に対し, 端点空間での最大正則性原理を証明する.

3. 研究の方法

J. Prüss (Halle 大学, ドイツ) と共同で, 質量保存則, 運動量保存則に加えて, 流速, 圧力, 温度を未知関数とする熱力学平衡, 即ちエネルギーの流入・散逸を考慮した相転移モデルを数学的に厳密に定式化した (5. 主な発表論文等中の雑誌論文 [17]. 以下同様). 流体力学の様々な様相を厳密にモデル化した系は, 質量・運動量・エネルギーのつり合いを込めて閉じた系となる. 相転移モデルは, ステファン問題と Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の双方を含む系であり, 流体工学で注目される混相流を表現し, 熱効果により自由境界(正確には自由界面であるがここでは自由境界と呼ぶ)の法線速度が流速の法線速度と異なるときに相転移が生じる. この原理により相転移現象を記述できる.

相転移モデルに先立ち, Navier-Stokes 方程式の自由境界問題について, 自由境界を固定境界に直し準線形方程式系に変換し, その線形化方程式系の最大正則性原理を示し, 縮小写像の原理によって準線形方程式系の解の適切性を示してきた. 最大正則性により, 自由境界を固定境界に変換した準線形方程式系を解く方法は, 様々な自由境界問題及び準線形方程式系の問題の解法として汎用性が高いことを確信していた. 相転移モデルは未知関数及び方程式の数が多いため解析が複雑となるが, 線形化問題の最大正則性を証明する技法により見通し良く証明でき, その結果を用いて自由境界問題の解の適切性を簡便に証明できることを実証する.

4. 研究成果

(1) 線形化問題の最大正則性に基づく相転移モデルの時間局所適切性

動的な自由境界を固定境界に変換するいわゆる半沢変換を用いて, 初期境界を超平面で与えて相転移モデルを定式化すると, それは準線形型となるが, その線形化問題に最大正則性を適用して縮小写像の原理により準線形問題の時間局所適切性を示した ([1], [7], [11], [15], [17]). 相転移問題では, 初期時刻に境界にある流体粒子が常に境界にとどまらないため, それを要請する Lagrange 変換を用いることができない.

密度は各相で定密度であるが, 各相で等しい場合 ([17]) と, 各相で異なる場合 ([1], [7], [11], [15]) を考察した. 熱伝導係数, 粘性係数, 密度等のパラメータの中で, 密度が系の性質を決める決定的な役割を持ち, 密度が両相で等しい場合には温度が支配する系に, 密度が両相で異なる場合には流速が支配する系となることを証明した.

(2) 線形安定解析原理に基づく相転移モデルの平衡解の安定性解析

有界領域における 2 相流体を考え, 初期相を有限個（m 個）の部分で与える. 符号を反転させたエントロピーが, いわゆるリヤプノフ関数となり, 平衡解は, 静止流速, 定圧力, 定温度で, 自由界面の平衡解は m 個すべてが同じ半径の球面となる. 平衡解は, m 個の球面が互いにまた境界に接触しないことを仮定する. 平衡解の安定性を考察するため, 平衡解の周りでの線形化問題を考え, その固有値を調べた. 線形作用素は, 球面が 1 つの場合は実部正の固有値をもたず, 球面が 2 つ以上の場合は $m-1$ 個の正の固有値をもつ. この結果から, 球面が 1 つの場合は平衡解は安定で, 平衡解の近くから出発したすべての解は時間大域的に存在し, 平衡解の近くに留まること, 球面が 2 つ以上の場合は, 平衡解は不安定で, 平衡解の近くから出発した解で, ある時間経過後に平衡解から離れる解が存在するという結果を得た. さらに, 解が特異性を生成せず, 自由境界の位相が不変ならば, 解は時間大域的に存在し, 部分領域が連結のときには平衡解に収束する. 時間局所解が（相対）コンパクトであることを示すことが鍵となるが, 時間重み付き最大正則性により証明した ([11]).

(3) 過冷却現象を組み込んだ相転移モデルの適切性と安定性

流体の表面張力が温度の関数となった場合は, 表面張力が不均質になることが原因で運動量の釣り合い方程式には, 流体の流れが駆動するマランゴニ対流が生じる. また過冷却は表面エントロピーを生成し, 自由界面上のエネルギーの釣り合い式として, 表面熱拡散方程式となる新たな相転移モデルとなる. 表面張力は温度の減少関数であり, 表面張力が正である低温条件を仮定する. 平衡解は過冷却現象を組み込まない場合と等しく, 静止流速, 定圧力, 定温度, m 個すべてが同じ半径の球面となる. (2) と同様の方法で, 球面が 1 つの場合は平衡解は安定で, 球面が 2 つ以上の場合は, 平衡解は不安定という結果を得た ([4]).

(4) 放物型方程式に対する端点空間における最大正則性の証明

最大 L_p-正則性は, その時間指数が $1<p<\infty$ と端点を含まない場合で, また X が UMD と呼ばれる Banach 空間の場合にはこの 20 年間でその一般理論が整備されてきた。非回帰的空間は UMD 空間ではないため, X が非回帰的 Banach 空間の場合と, 時間指数が $p=1,\infty$ の場合は一般理論に載らず各論で論じなければならない.

[3] では, 定数係数一様楕円型作用素の時間発展方程式の初期値問題に対して, 斉次 Besov 空間 $X=\dot{B}^0_{p,1}(1\le p\le\infty)$ の場合に最大 L_1-正則性が時間大域的に成り立つことを証明した. X に対して下からの評価も成立し, 最大 L_1-正則性は $X=L^1$ に対して成立しないことも示された. Besov 空間を非斉次 $X=B^0_{p,1}(1\le p\le\infty)$ にすると, 最大正則性定数は, 時間 T に伴い $\mathrm{Log}T$ で増大し, 非斉次 Besov 空間では時間一様には成立しないことが示された. さらに, 変数係数の一様楕円型作用素の時間発展方程式の初期値問題に対して, $X=\dot{B}^0_{p,1}(1\le p\le\infty)$ の場合に最大 L_1-正則性が成り立つことを証明した. 変数係数の場合には, 時間一様の評価は成立していない.

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 18 件）

[1] S. Shimizu, S. Yagi, On local L_p-L_q well-posedness of incompressible two-phase flows with phase transitions: Non equal densities with large initial data, Advances Differential Equations, **22** (2017), 737-764, 査読有.

[2] J. Prüss, S. Shimizu, Modeling of two-phase flows with and without phase transitions, *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics*

of Viscous Fluids, Springer, (2016), 38 pages, DOI:10.1007/978-3-319-10151-4_24-1, 査読有.

[3] T. Ogawa, S. Shimizu, End-point maximal L^1-regularity of the Cauchy problem for the Cauchy problem to a parabolic equation with variable coefficients, Math. Ann. **365** (2016), 661-705, DOI:10.1007/s00208-015-1279-8, 査読有.

[4] J. Prüss, S. Shimizu, G. Simonett, M. Wilke, *On incompressible two-phase flows with phase transition and variable surface tension*, *Recent Developments of Mathematical Fluid Mechanic*, Adv. Math. Fluid Mech., Birkhäser/Springer (2016), 411-442, DOI:10.1007/978-3-0348-0939-9_22, 査読有.

[5] T. Matsumoto, N. Tanaka, Abstract Cauchy problem for weakly continuous operators, J. Math. Anal. Appl. **435** (2016), 267-285, 査読有.

[6] T. Kobayashi, T. Kubo, *Weighted L^p-L^q estimates of Stokes semigroup in half-space and its application to the Navier-Stokes equations*, *Recent Developments of Mathematical Fluid Mechanic*, Adv. Math. Fluid Mech., Birkhäser/Springer (2016), 337-349, DOI:10.1007/978-3-0348-0939-9_18, 査読有.

[7] S. Shimizu, S. Yagi, On local L_p-L_q well-posedness of incompressible two-phase flows with phase transitions: the case of non equal densities, Differential Integral Equations **28** (2015), 29-58, http://projecteuclid.org/euclid.die/1418310420, 査読有.

[8] T. Kobayashi, T. Kubo, *Weighted estimates of Stokes semigroup in some unbounded domains*, Adv. Stud. Pure Math. **64** (2015), 427-435, 査読有.

[9] N. Tanaka, Flow invariance for differential delay equations, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), 2459-2468, 査読有.

[10] N. Tanaka, The abstract Cauchy problem for dissipative operators with respect to metric-like functions, J. Math. Anal. Appl. **421** (2015), 539-566, 査読有.

[11] J. Prüss, S. Shimizu, M. Wilke, *On the qualitative behaviour of incompressible two-phase flows with phase transition: The case of non-equal densities*, Comm. Partial Differential Equations, 39 (2014), 1236-1283, DOI:10.1080/03605302.2013.821131, 査読有.

[12] T. Kobayashi, T. Ogawa, Fluid mechanical approximation to the degenerated drift-diffusion system from the compressible Navier-Stokes-Poisson system, Indiana Univ. Math. J. **62** (2013), 1021-1054, DOI:10.1007/s00208-015-1279-8, 査読有.

[13] T. Kobayashi, M. Misawa, *L^2 boundedness for the 2D exterior problems for the semilinear heat and dissipative wave equations*, Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations, RIMS Kokyuroku Bessatsu. **B42** (2013), 1-11, 査読有.

[14] T. Kobayashi, T. Kubo, *Weighted L^p-L^q estimates of Stokes semigroup in some unbounded domains*, Tsukuba J. Math. **37** (2013), 179-205, 査読有.

[15] J. Prüss, S. Shimizu, *On well-posedness of incompressible two-phase flows with phase transition: The case of non-equal densities*, J. Evolution Equations, 12 (2012), 917-941, Doi: 10.1007/s00028-012-0161-3, 査読有.

[16] S. Shimizu, *Maximal regularity and its application to free boundary problems for the Navier-Stokes equations, American Mathematical Society*, Sugaku Expositions, 25 (2012), 105-130, 査読有.

[17] J. Prüss, Y. Shibata, S. Shimizu, G. Simonett, *On well-posedness of incompressible two-phase flows with phase transition: The case of equal densities*, Evolution Equations

and Control Theory, 1 (2012), 171-194, DOI: 10.3934/eect.2012.1.171, 査読有.

[18] Y. Shibata, S. Shimizu, *On the maximal L_p-L_q regularity of the Stokes problems with first order boundary condition; model problems*, J. Math. Soc. Japan., 64 (2012), 561-626, DOI:10.2969/jmsj/06420561, 査読有.

〔学会発表〕(計 26 件)

[1] 清水扇丈, 定温条件下での相転移を伴う 2 相流体について, 京都大学大学院理学研究科/数理解析研究所談話会, 2015.10.5, 京都大学 (京都市).

[2] J. Prüss, S. Shimizu, Two-phase flows with phase transitions, The Asian Mathematical Conference 2016 2016.7.25-29, Bali (Indonesia).

[3] J. Prüss, S. Shimizu, Two-phase flows with phase transitions, International Conference on Navier-Stokes Equations and Related PDE's, 2016.6.23-25, Daejeon (Korea).

[4] J. Prüss, S. Shimizu, Two-phase flows with phase transitions, International Conference on Evolution Equations, 2016.5.16-20, Nashville (USA).

[5] 清水扇丈, Local existence of isothermal compressible two-phase flows with phase transitions, 第 29 回南大阪応用数学セミナー, 2016.4.16, 大阪府立大学 (堺市).

[6] S. Shimizu, Local existence of isothermal compressible two-phase flows with phase transitions, 第 8 回名古屋微分方程式研究集会, 2016. 2.23-24, 名古屋大学 (名古屋市).

[7] S. Shimizu, Local existence of isothermal compressible two-phase flows with phase transitions, PDE2015, Weierstrass Institute for Analysis and Stochastics, 2015.11.30-12.4, Berlin (Germany).

[8] 清水扇丈, Local existence of compressible two-phase flows with phase transitions,The 13th Linear and Nolinear Waves, 2015.11.3-5, ピアザ淡海 (大津市).

[9] J. Prüss, S. Shimizu, Local existence of compressible two-phase flows with phase transitions, 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会, 2015.9.16, 京都産業大学 (京都市).

[10] S. Shimizu, Local existence of compressible two-phase flows with phase transitions, Workshop on the Navier-Stokes Equations in honor of Prof. Reinhard Farwig's 60th birthday, 2015.4.22-23, Darmstadt (Germany).

[11] S. Shimizu, On local existence of compressible two-phase flows with phase transitions, Bielefelder Stochastic Afternoon, 2015.1.16, Bielefeld (Germany).

[12] 清水扇丈, End-point maximal L^1 regularity for a parabolic equations with variable coefficients, 東北大学大学院理学研究科解析セミナー, 2014.7.4, 東北大学 (仙台市).

[13] S. Shimizu, End-point maximal L^1 regularity for a parabolic equations with variable coefficients, 保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性・特異性の研究, 2014.5.29, 京都大学数理解析研究所 (京都市).

[14] S. Shimizu, End-point maximal L^1-regularity of the Cauchy problem for a parabolic equation, Vorticity, Rotation and Symmetry (III), Approaching limiting cases and fluid flow, 2014.5.5, Luminy (France).

[15] 清水扇丈, Stability of equilibria for incompressible two-phase flows with phase transitions, 偏微分方程式セミナー, 2013.12.16, 北海道大学 (札幌市).

[16] J. Prüss, 清水扇丈, G. Simonett, M. Wilke, 相転移を伴う有界領域内非圧縮性 2 相流の解の安定性—表面張力が変数の場合-, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 函数方程式論分科会, 2013.9.27, 愛媛大学 (松山市).

[17] S. Shimizu, Qualitative Behaviour of Incompressible Two-Phase Flows with Phase Transitions, 4th Japan-China Workshop on Mathemat-

ical Topics from Fluid Mechanics, 2013.9.19, 東京工業大学 (目黒区).

[18] S. Shimizu, Incompressible two-phase flows with phase transitions and variable surface tension, Mathematical Hydrodynamics and Parabolic Equations in honor of Vesvolod Solonnikov on the occasion of his 80th birthday, 2013.9.12, Steklov Institute, St.Petersburg (Russia).

[19] S. Shimizu, Qualitative behavior of incompressible two-phase flows with phase transitions, Workshop Linear and Nonlinear PDE, August 1, 2013.8.1, Pisa (Italy).

[20] S. Shimizu, Stability of equilibria for incompressible two-phase flows with phase transitions, Pacific RIM 2013, 2013.7.4, 札幌コンベンションセンター (札幌市).

[21] J. Prüss, 清水扇丈, M. Wilke, 相転移を伴う有界領域内非圧縮性 2 相流の解の安定性—異密度の場合-, 日本数学会 2013 年度年会, 函数方程式論分科会, , 2013.3.23, 京都大学 (京都市).

[22] 清水扇丈, On well-posedness of incompressible two-phase flows with phase transitions in a bounded Domain,「応用解析」研究会, 2012.12.1, 早稲田大学 (新宿区).

[23] S. Shimizu, Local well-posedness of incompressible two-phase flow with phase transition in a bounded domain, Mathflows, 2012.10.24, Porquerolles (France).

[24] Y. Shibata, S. Shimizu, On $\mathcal{R}$-sectoriality of the Stokes equations with first order boundary condition in a general domain, Parabolic and Navier-Stokes equations 2012, 2012.9.7, Banach Center, Bedlewo (Poland).

[25] S. Shimizu, On well-posedness of incompressible two-ohase flows with phase transitions, 37-th Sapporo symposium on Partial Differential Equations, 2012.8.27, 北海道大学 (札幌市).

[26] 清水扇丈, On well-posedness of Incompressible two-phase flows, 非線形現象の数理と数値解析 2012, 2012.5.26, 富山大学 (富山市).

〔図書〕(計 1 件)

T. Kobayashi, S. Shimizu, Y. Enomoto, N. Yamaguchi, T. Kubo eds., Mathematical Fluid Dynamics and Nonlinear Wave, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications **37**, GAKKOTOSHO, 2015.

〔その他〕

ホームページ等

https://www.h.kyoto-u.ac.jp/academic_f/faculty_f/141_shimizu_s_0/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

清水 扇丈(SHIMIZU, Senjo)
京都大学・大学院人間・環境学研究科・教授
研究者番号: ５０２７３１６５

(2) 研究分担者

田中 直樹(TANAKA, Naoki)
静岡大学・理学部・教授
研究者番号:００２０７１１９

小林 孝行(KOBAYASHI, Takayuki)
大阪大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号:５０２７２１３３

久保 隆徹(KUBO, Takayuki)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号:９０４２４８１１

菊地 光嗣(KIKUCHI, Koji)
静岡大学・工学部・教授
研究者番号:５０１９５２０２

(3) 連携研究者

小川 卓克(OGAWA, Takayoshi)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号:２０２２４１０７

久村 裕憲(KUMURA, Hironori)
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号:３０２８３３３６